译者的话

《立体几何短文集》是我们编译的《量子》数学短文精粹中的一本.《量子》杂志是苏联科学院、苏联教育科学院共同主办的一本数学、物理科普杂志.其中的数学短文新颖、趣味、针对性强、文字通俗易懂，能启迪智慧，培养能力，对指导中学生学习、开展第二课堂活动，举办数学奥林匹克都是极有价值的材料.对广大的中学教师也是有益的教研资料.

立体几何是中学数学中重要的一个分科，也是中学生学习时多感困难的一门学科.为此，我们选译了《量子》中的部分立体几何短文，奉献给广大读者.

学习立体几何要很好地发展空间想象力；解立体几何问题往往要综合运用代数、三角、几何等诸方面的知识与方法；要学会画总图与分图.学习立体几何常常要与平面几何进行类比，常常要使用辅助元素.如果说，辅助的线段和角你可能比较熟悉，那么“辅助立方体”就有不少新意！当你学会解一些基本问题之后，怎样解多图形的立体几何问题？怎样解非常规、非标准的立体几何问题？短文中都有专门篇目进行介绍.这些短文融知识与方法为一体，既有丰富的材料，又渗透着数学的思想，每篇后还都配备供读者练习的少量习题.我们期望这本短文集能成为中学数学教师、数学辅导员的助手，期望它成为广大中学生学习立体几何的益友.

需要说明的是，我们选择的文章只是《量子》中立体几

何短文中的一部分，由于资料不全，尚有不少优秀短文未能收入。另外，由于译者水平所限，陋误难免，望读者指正。

最后，我们对裘宗沪副研究员在百忙中精校本书各篇的译稿表示感谢。

译者 北京师范学院数学系 周春荔
樊 进
1988 年 1 月

目　　录

一、几何的类比

B.库切罗夫

学习几何学，你大概会发现，三角形与四面体的某些性质很相像．与三角形联系的许多几何概念，在空间也有类似的东西．例如：三角形的边——四面体的面，边长——侧面面积，内切圆——内切球，外接圆——外接球，面积——体积，角平分线——二面角的平分面等等．

这个类比，不仅是表面的，许多关于三角形的定理，如果在它里面的平面几何术语用相应的立体几何术语来代替，并且简述的相应方式稍加修改，就变为关于四面体的定理．我们将研究某些这样的定理．

定理 1 三角形 ABC 内角平分线 CD 分对边所成的线段与边 AC 和 BC 成比例．

证明 首先在三角形ADC与 DBC 中分别采用线段 AC 和 BC 为底边(图 1)．点D到角 ACB 的两边是等距离的，因此

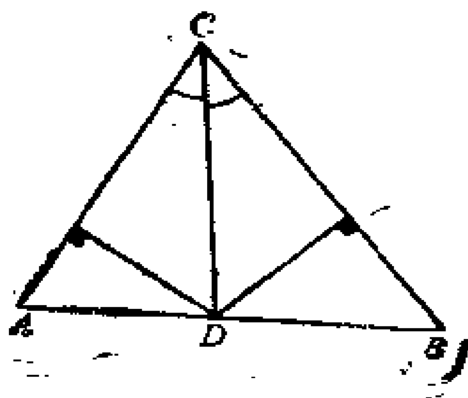


图 1

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}=\frac{|AC|}{|BC|}.$$

现在，在这两个三角形中再采用线段 AD 和 DB 为底边，很明显，

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}}=\frac{|AD|}{|BD|}.$$

从而

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}.$$

我们想起，分一个二面角为两个量值相等的二面角的半平面叫做这个二面角的平分面．二面角的平分面是与它的界面等距离的点集．我们证明，四面体的二面角的平分面也有三角形角的平分线相类似的性质．

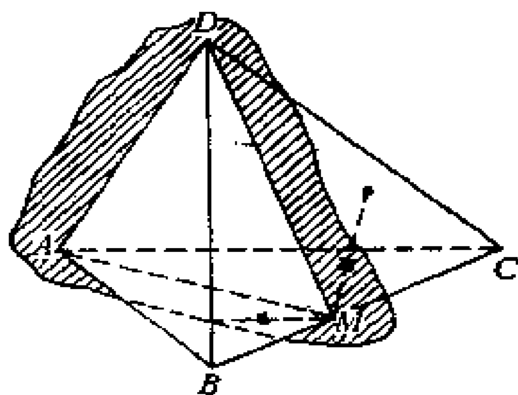


图 2

定理 2 四面体二面角的平分面分对棱所成的比等于形成这个二面角的两个界面面积之比．

证明 设 ADM 为四面体的截面，是以 AD 为棱的二面角的平分面(图 2)．四面体 $ACMD$ 与 $ABMD$ 的体积分别用 V_1 和 V_2 表示．

因为点 M 与界面 ADC 和 ADB 等距离，

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}},$$

另一方面，容易看到，

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}=\frac{|MC|}{|MB|},$$

所以

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{|MC|}{|MB|},$$

这正是需要证明的结论。

顺便指出，$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$，这再一次强调指出定理 1 与 2 的相似性。

对于下面的内容我们需要下列的论断：

如果 $M\in AB$，和 $|AM|:|MB|=m:n$，那么对于空间任意一点 O，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

（确认这个论断！）

我们应用（1）来证明三角形三条中线交于一点的定理（《6—8 年级几何》问题 638）和对于四面体类似的定理（《9—10 年级几何》问题 314）。

定理 3 三角形的三条中线相交于一点，并且这一点分每一条中线的比是 2:1.

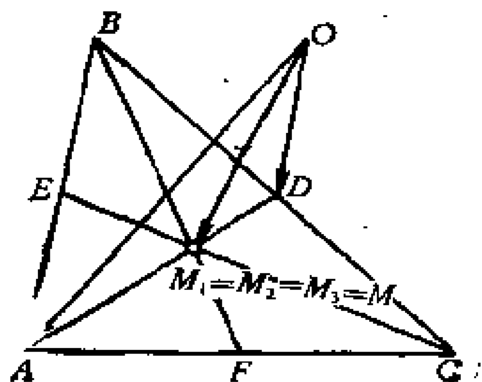


图 3

证明 设 M_1 是三角形 ABC 的中线 AD 上使 $|AM_1|:|M_1D|=2:1$ 的点．O 是空间任意一点（图 3）。

根据（1）我们有

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

和 $$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

因此 $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

如果 M_2 和 M_3 是中线 CE 与 BF 上从顶点算起分为 2∶1 的分点．则类似有

$$\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

这样一来， $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}$，

从而，点 M_1，M_2 和 M_3 重合，定理得证．

我们顺便得到了著名的关系式：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

其中 M 是三角形的重心(三中线的交点)，而 O 是空间任意一点．

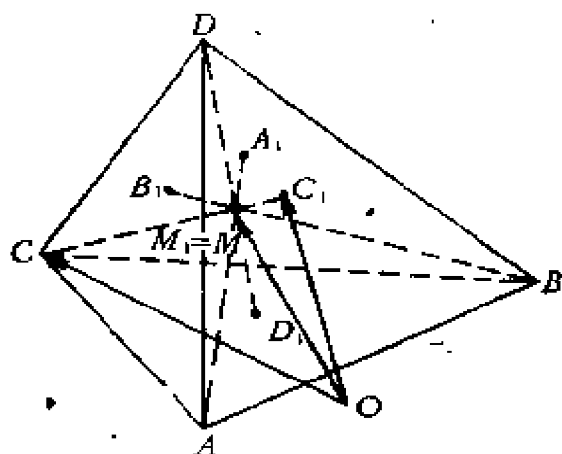


图 4

所谓四面体的中线是连结四面体的顶点与所对界面重心的线段．看来，对于四面体的中线类似于定理 3 的定理是正确的．

定理 4 四面体的四条中线相交于一点并且交点分每一条中线（由顶点

算起）为 3:1 的两段.

证明 设 M_1是四面体 $ABCD$ 中线 CC_1 上使得 $|CM_1|:|M_1C_1|=3:1$ 的点(图 4). 设 O 是空间任意一点. 根据公式(1)

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC_1}.$$

此外，
$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}).$$

因为 C_1 是三角形 ABD 的重心. 所以

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

对于把四面体的中线 AA_1, BB_1 和 DD_1 分别分为 3:1 的比的点 M_2, M_3 和 M_4 可以得到同样的表达式. 因此

$$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_4}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

即点 M_1, M_2, M_3 和 M_4 重合.

四面体的中线的交点 M 也叫做它的重心. 我们注意，对于空间任意点 O，等式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

都是正确的.

最后，我们研究平面几何中一个有趣的定理，并且试图找到立体几何中与它类似的定理.

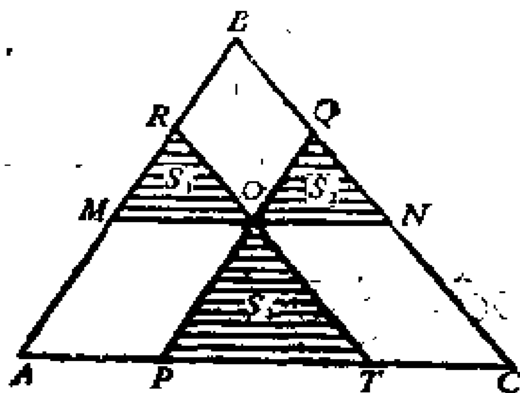


图 5

定理 5 通过三角形ABC内取的任一点O，作平行于它各边的直线．如果S_1，S_2，S_3是所形成的三角形的面积（图 5），而S是已知三角形的面积，则

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

证明 形成的三角形与三角形ABC相似，因此，

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{|MR|}{|AB|},\quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{|OQ|}{|AB|},\quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{|OP|}{|AB|}$$

这些等式相加，得到

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{|MR|+|OQ|+|OP|}{|AB|}$$

$$=\frac{|MR|+|BR|+|MA|}{|AB|}=1,$$

即

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

我们简述在空间中类似的定理．

定理 6 通过四面体内部取的任意一点，作平行于四面体界面的四个平面．如果V_1，V_2，V_3，V_4是形成的四面体的体积，而V是已知四面体的体积，那么

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}+\sqrt[3]{V_3}+\sqrt[3]{V_4}.$$

为了证明这个定理，我们请读者利用条件中涉及的四面体与原四面体相似，同样地，相似多面体体积的比等于它们

棱长的立方之比。

下面的习题都是一对对联系的，在每一对中，(a)是平面几何中的某个定理，而(b)是它在空间中类似的定理。

练 习 题

1. (a) 证明：圆外切的三角形的面积，用公式 $S=\frac{1}{2}p\cdot r$来计算。其中 r 是圆的半径，p是三角形的周长。

(b) 证明：球外切的四面体的体积，用公式 $V=\frac{1}{3}Sr$ 来计算，其中 r 是这个球的半径，S是四面体的表面积。

2. (a) 在三角形中，内切圆的半径是 r，证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}.$$

其中 h_1，h_2，h_3是三角形的三条高线。

(b) 在四面体中内切球半径是 r。证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}.$$

其中 h_1，h_2，h_3，h_4是四面体的四条高线。

3. (a) 通过正三角形的中心引平行于底边的直线，在这条直线的三角形内部份的线段上取任意一点O。证明：点O到三角形底边的距离于等点O到另外两边距离的算术平均值。

(b) 通过正四面体的中心作平行于底面的平面。这一平面被四面体所截的部分上取任意一点O。证明：点O到四面体底面的距离等于点O到四面体三个侧面距离的算术平均值。

译自《量子》1981 年第 10 期

二、辅助元素法

И. 库雪涅尔

当我们引入了问题条件中没有直接给出的辅助元素，一大类几何问题的解法都可简化．这些元素可以是长度、面积、体积、角度．借助它们列出方程，其中未知数正是所求的元素，或者是借助它们容易求得所求的元素．有时，借助这个元素列出的是不等式，而这个关系恰是解问题所需要的．

辅助的线性元素

在平面几何问题中，如果研究的图形是相似形，引入线性元素或者线性元素的比是很方便的．这时借助比例或者辅助的几何作图列出方程式，在方程式中引入的元素作为方程的项被消掉，从而求得所求的量不会很费力气．

我们研究 Новосибирск 市国立大学提供的入学试题的解答．

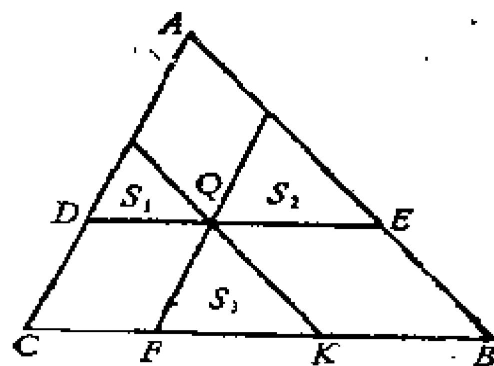


图 1

问题 1 通过三角形内部的某一点，分别引平行于三边的三条直线．这些直线分三角形为六个部分，其中有三个三角形的面积分别为 s_1, s_2, s_3．求已知三角形的面积．

当着手解题时，我们就会发现面积为 s_1，s_2，s_3的三角形和面积为 s 的三角形 ABC

都相似(图 1). 此外，小三角形的边 DQ、QE 和 FK 的长度之和等于三角形 ABC 中 BC 边的长. 利用这些边作为辅助元素，我们得到方程

$$\frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s}}=\frac{DQ}{BC},\quad \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s}}=\frac{QE}{BC},\quad \frac{\sqrt{s_3}}{\sqrt{s}}=\frac{FK}{BC}.$$

将它们相加，得

$$\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}}{\sqrt{s}}=\frac{DQ+QE+FK}{BC}=1.$$

从而 $$s=(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3})^2.$$

当问题条件中没有给出线性元素，而需要求得角之间的关系时，我们介绍引入辅助的线段.

问题 2 已知一个等腰三角形三高线的交点在三角形的内切圆上，求等腰三角形底角的余弦值.

根据条件，$\triangle ABC$ $(AB=AC)$ 的垂心 H 应当在三角形内部，因此 $\angle A<90°$ (图 2). 我们引入辅助元素 a——线段 BD 的长. 通过 x 表示角 $\angle ABC$，内切圆中心用 O 表示. 则

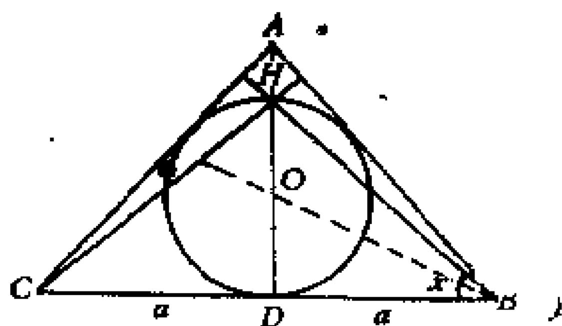


图 2

$$\angle HCD=\frac{\pi}{2}-x,$$

$$HD=a\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a\,\mathrm{ctg}\,x=2OD,$$

$$OD = a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2},$$

由此

$$\mathrm{ctg}\,x = 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}, \quad \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{5},$$

$$\cos x = \frac{2}{3}.$$

引入辅助元素对于求各种几何量的比有着特殊重大的意义.

问题 3 正四棱台（截头正四棱锥）的大底同侧面形成角 α，而通过上底与下底相对的边的平面与底面形成角为 β. 求上底面积 S' 与下底面积 S 之比.

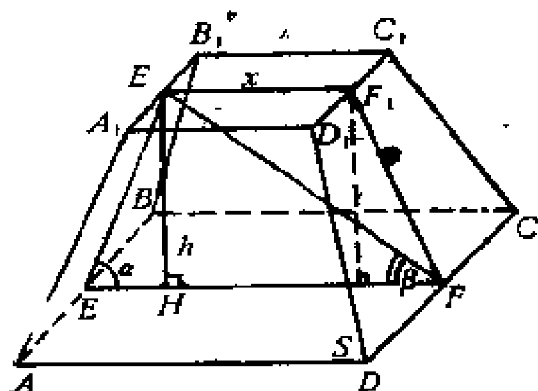


图 3

我们引入辅助元素 a 为棱台大底的边长(图3)，这个底的面积是 a^2. 上面底的边长能够通过 a, α 和 β 表出. 我们研究等腰梯形 EE_1F_1F，它是用垂直于底面并且通过边 AB 及 CD 中点的平面截这个棱台所得到的. 我们再引入辅助线段 $E_1H = h$，$E_1F_1 = x$，则

$$HF = \frac{1}{2}(a + x),$$

$$EH = \frac{1}{2}(a - x),$$

$$h = HF\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}(a+x)\,\mathrm{tg}\,\beta$$

$$= EH\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}(a-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

我们得到方程式

$$(a+x)\mathrm{tg}\,\beta = (a-x)\mathrm{tg}\,\alpha.$$

由此，

$$x = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

辅助元素——面积或体积

类似于引入线性元素，也可以引入面积和体积作辅助元素。比较图形不同部分的面积和体积，可以得到未知因素的方程式，或者是必需的关系式。这样的面积与体积较容易求出，它们的和(差)给出了已知图形的面积，以及给出了这些图形面积的比。图中的线性元素——正是所求的，或者是必需的关系式中的成份。

问题 4 通过正三角形的中心引平行于底边的直线。在这条直线三角形内的部分上任取一点M，证明：由点M到三角形底边的距离是由点M到三角形另两边距离之和的算术平均值。

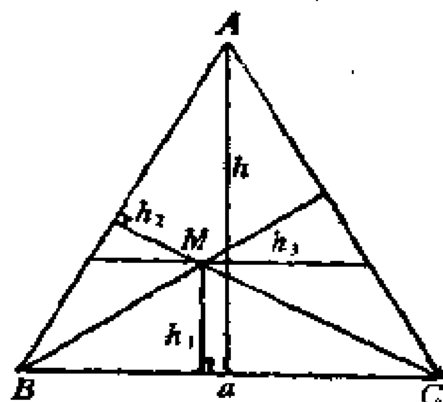


图 4

设 h_1，h_2，h_3 是由点 M

分别到三角形的边 BC，AB，AC 的距离（图 4）．很清楚，

$$S_{\triangle AMB}+S_{\triangle CMB}+S_{\triangle AMC}=S_{\triangle ABC}.$$

或者，$ah_1+ah_2+ah_3=ah$，其中 a 是正三角形 ABC 的边长，h 是它的高线．从而

$$h=h_1+h_2+h_3,\quad 而\ h_1=\frac{h}{3},$$

故
$$h_2+h_3=h-h_1=\frac{2}{3}h=2h_1,$$

得
$$h_1=\frac{h_2+h_3}{2}.$$

问题 5 已知四边形 $ABCD$ 是圆的外切四边形，证明：由圆心到相对的两个顶点距离平方之比等于由这两个顶点引出的边的乘积之比．

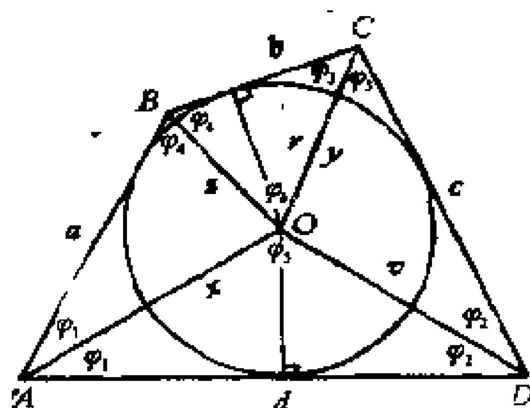


图 5

如图 5 中引入的字母，我们需要证明

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{ad}{bc}.$$

三角形 AOD 与 BOC 的高相等，因此

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{d}{b}. \qquad (1)$$

另一方面，

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{xv\sin\varphi_5}{yz\sin\varphi_6}. \qquad (2)$$

我们可证明 $\sin\varphi_5=\sin\varphi_6$. 为此，我们发现，$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\pi$（这是四边形所有内角和的一半），$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_5=\pi$，$\varphi_4+\varphi_3+\varphi_6=\pi$. 由此推出，$\varphi_5+\varphi_6=\pi$，$\sin\varphi_5=\sin\varphi_6$，由公式(2)我们得到

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{xv}{yz}. \qquad (2')$$

由关系式(1)及(2′)有 $\frac{xv}{yz}=\frac{d}{b}$，类似地 $\frac{xz}{yv}=\frac{a}{c}$. 最后两个等式相乘，我们得到

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{ad}{bc},$$

由它们中的第一个除以第二个，得到

$$\frac{v^2}{z^2}=\frac{cd}{ab}.$$

我们举一个用体积作为辅助元素的问题.

问题6 三棱锥的侧棱互相垂直并且等于 a，b，c. 由顶点引向底面的棱锥的高等于 h. 证明

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

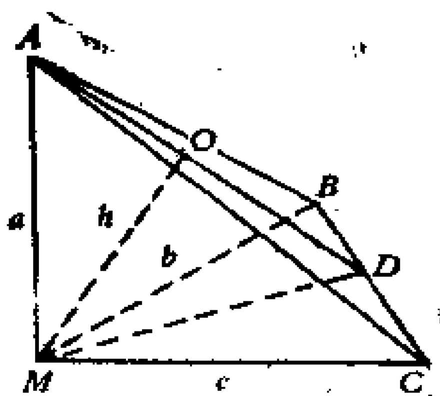


图 6

我们用两种方法来计算棱锥的体积. 第一种情况认为它的底是三角形 ABC（图6），而第二种情况，以界面 AMC

作底．设 $MA=a$，$MB=b$，$MC=c$，$MO=h$，$AD\perp BC$．
则 $AC=\sqrt{a^2+c^2}$，$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，$AB=\sqrt{a^2+b^2}$．
进一步，$MD\perp BC$（为什么？）由$\triangle BMC$，有
$BD\cdot BC=BM^2$，由此

$$BD=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

但 $$AD^2=AB^2-BD^2=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\times\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

$$V_{MABC}=\frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \qquad (3)$$

如果底是三角形 AMC，则

$$V_{MABC}=\frac{1}{6}abc. \qquad (4)$$

比较（3）与（4）得

$$\frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{1}{6}abc.$$ 由此，

$$(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)h^2=a^2b^2c^2.$$

所得的等式两边都除以 $a^2b^2c^2h^2$，我们就得到需要证明



的等式.

问题 7 试证：球的外切棱锥的体积按公式$V=\frac{1}{3}sr$来计算，其中r是在棱锥中内切球的半径，s是棱锥的全表面积.

我们分原来的棱锥为若干个部分，其中每一部分都是顶点在(球心)O点，底面是原棱锥的界面的棱锥(图 7)．原来棱锥的体积等于这些棱锥体积V_1，V_2，……，V_k的总和．但

$$V_i=\frac{1}{3}s_ir_i,$$

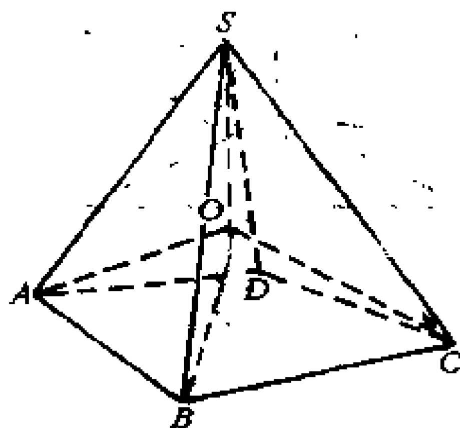


图 7

因为棱锥V_i的高是过球与界面的切点引的球的一条半径r，所以

$$V=V_1+V_2+\cdots\cdots+V_k$$

$$=\frac{1}{3}(s_1+s_2+\cdots\cdots+s_k)r=\frac{1}{3}sr.$$

我们发现，对于存在内切球的任意的多面体，问题的结论都是对的.

辅助元素——角

如果所求的或者已知的元素借助三角函数表示很方便，则引进辅助角．然后借助正弦或余弦定理解三角形，这个三

角形中存在某些条件写作方程形式的成分。

问题 8 通过正三角形的中心在这个三角形的平面上引任意一直线．证明：由三角形的顶点到这直线距离的平方和与直线的选择无关．

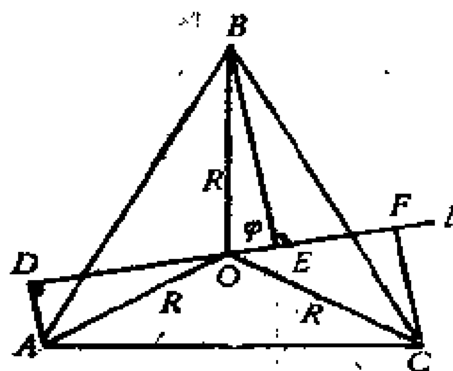


图 8

设点 O 是三角形 ABC 的中心（图 8）．点 D，E，F 分别是顶点 A，B，C 在直线 l 上的射影．R 是三角形 ABC 外接圆的半径．我们引入辅助角 φ，用它来表示 $\angle BOE$，

则
$$\angle AOD=\angle AOB-\angle BOD=\varphi-\frac{\pi}{3}.$$

$$\angle COE=\frac{2\pi}{3}-\varphi,$$

$$BE=R\sin\varphi,\quad AD=R\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$CF=R\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)=R\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$AD^2+BE^2+CF^2=R^2\left[\sin^2\varphi+\sin^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{3}{2}R^2.$$

（独立检验，在方括号中三项平方之和等于 $\frac{3}{2}$）．

问题 9 在直平行六面体中，$ABCDA_1B_1C_1D_1$的底是一个边长为 a 的正方形．通过下底 $ABCD$ 的对角线 AC 做平面与上底 $A_1B_1C_1D_1$相交．在三面角 B 与 D_1中有与上述平面相内切的两个球，它们的半径分别为 $r=\frac{a}{5}$，$R=\frac{a}{4}$，求平行六面体的高．

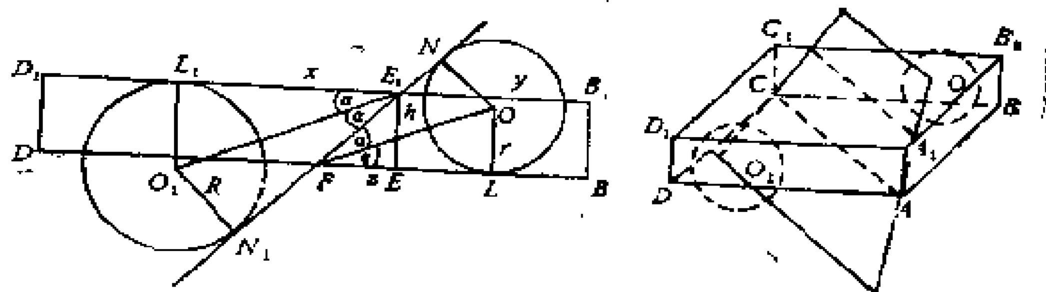


图 9

平行六面体（图 9）中对角线截面 DBB_1D_1通过球的中心O和 O_1．设 L 和 L_1是两个球同平行六面体底面的切点．N和 N_1是两个球同所作平面的切点（我们暂时不知道，切点的位置在平行六面体的外部或者内部，但这对我们不是必要的）．OF 和 O_1E_1是角 NOL 和 $N_1O_1L_1$ 的平分线．（点F是 BD 的中点），EE_1是平行六面体的高线．$OL=ON=r$，$O_1L_1=O_1N_1=R$．我们假设$\angle BFE_1=2\alpha$，$L_1E_1=x$，$E_1B_1=y$，$FE=z$．则

$$h=z\operatorname{tg}2\alpha,\quad z=FB-BE=\frac{a\sqrt{2}}{2}-y,$$

$$y = a\sqrt{2} - x - D_1L_1 = a\sqrt{2} - x - R\sqrt{2}$$，以及

$$z = x + R\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = x - \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

由三角形$O_1L_1E_1$与OLF相似，推出

$$\frac{x}{R} = \frac{FL}{r},$$

$$FL = FB - LB = \frac{a\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{10},$$

$$x = \frac{3}{8}a\sqrt{2}, \quad z = \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

由三角形OLF求得，$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{FL} = \frac{\sqrt{2}}{3}$，由此

$$h = \frac{3}{14}a.$$

问题 10 正三棱锥的侧棱等于b，侧面之间的角等于φ. 求底面边长.

图 10

由点B和C向侧棱AS引垂线(图 10). 容易确认，这两条垂线的垂足是同一点D(证明！)，所以$\angle BDC = \varphi$.

我们引进辅助角$\angle BAS = \alpha$并且作棱锥的侧高SK. 很明显，$AB = 2AK = 2b\cos\alpha$. 因此，为了解这个问题必须计算$\cos\alpha$. 因为$\alpha < 90°$，则由三角BAD，有

$$\alpha = \arcsin\frac{BD}{AB}.$$

又线段 BD 的长由三角形 BLD 确定（DL 是三角形 BDC 的高线）：

$$BD = \frac{BL}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{AB}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

这样一来，
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right),$$

由此，

$$AB = b\sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

练 习 题

1. 在三角形 ABC 中，内切圆切边 AB 于 D，切边 BC 于 E．如果 $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$，$\frac{BE}{CE} = \frac{1}{3}$．求三角形各角．

2. 在正四面体 $ABCD$ 中，MN 是连结棱 AC 中点和面 BDC 中心的线段，而点 E 在棱 AB 的中点．求线段 MN 和 DE 之间的角．

3. 在梯形中，它的两底分别等于 a 和 b，通过梯形对角线交点引平行于底边的直线，求这条直线上被梯形两腰截得的线段的长．

4. 已知三角形 ABC，在边 AC 上取点 E，使得

$AE:EC=a$，在边AB上取点D，使得$AD:DB=b$，引线段CD和BE．求所得的四边形$BDEC$面积与$\triangle ABC$面积的比．

5．内接于一个球且侧棱等于C的棱锥，棱锥的底是个矩形，矩形的边上在用侧面所在平面截球的截面上紧系着α与β弧度的弧，确定棱锥外接球的半径．

6．在半径为R的圆中给定两点A和B，它们之间的距离是l．如果点C也在这个圆上，那么AC^2+BC^2取得怎样的最大值？

7．正四棱锥中在侧棱处的二面角等于α，外接球的半径等于R，求棱锥的全表面积．

译自《量子》1974年第2期

三、辅助的线段和角

И.克勃维奇

在解几何题时，除了已知条件中有的量以外，引进辅助的量(线段的长，角的值等等)，通过它们来表示未知的量，常常可以获得好的效果。在这当中，有一种情况是引进的辅助量在解题过程中会“消失”（例如约去了），另一种情况则要通过已知的量来确定。

问题1 $\triangle ABC$中，内切圆分别切边AC和BC于点M和N，并与角平分线BD相交于点P和Q。如果$\angle A=\frac{\pi}{4}$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$（图1），求$\triangle PQM$和$\triangle PQN$面积之比。

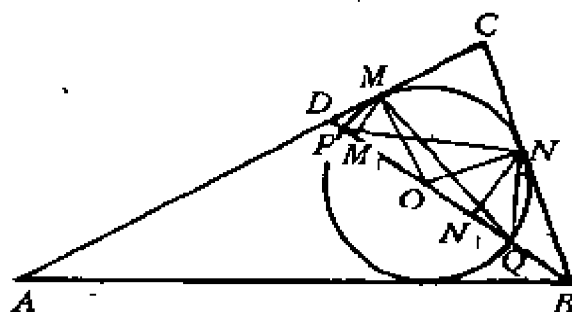


图 1

解 在$\triangle PQM$和$\triangle PQN$中作高线$MM_1\perp PQ$，$NN_1\perp PQ$。因为$\triangle PQM$和$\triangle PQN$有公共底边，所以

$$\frac{S_{\triangle PQM}}{S_{\triangle PQN}}=\frac{MM_1}{NN_1}.$$

设O是内切圆的中心且$OM=ON=x$。因为$\angle BON=\frac{\pi}{3}$，而$\triangle ONN_1$是直角三角形，所以$NN_1=\frac{x\sqrt{3}}{2}$。

因为$\angle C=\frac{5\pi}{12}$，由四边形$NOMC$我们可得

$\angle MON=\frac{7\pi}{12}$. 所以$\angle MOM_1=\frac{\pi}{12}$. 由$\triangle MOM_1$得

$$MM_1=x\sin\frac{\pi}{12}=x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=x\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

答 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$.

问题 2 正四棱锥的高与侧面成30°的角，通过棱锥底面一边作与此边所对侧面垂直的平面. 求这个平面将棱锥截得的两个多面体体积之比.

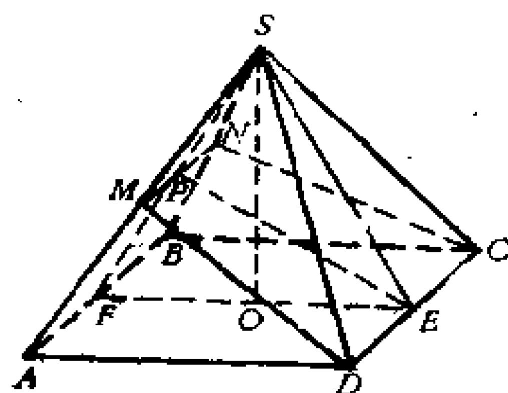


图 2

解 容易看出截面四边形$CDMN$(图 2)是个梯形. 通过高SO和侧高SE作平面. 这个平面垂直于侧面SAB和SCD(为什么？)，所以$\angle FSO=30°$. 因为$SF=SE$，且$\angle FSE=60°$，三角形FSE是正三角形.

设$AB=AD=EF=x$，则$MN=\frac{x}{2}$，

$$EP=\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

我们求四棱锥$SCDMN$的体积. 因为线段SP是这个棱锥的高(为什么？)，而梯形$CDMN$是它的底. 所以

$$V_{SCDMN}=\frac{1}{3}SP\cdot S_{CDMN}.$$

因为$SP=\frac{x}{2}$和

$$S_{CDMN}=\frac{\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{8},$$我们得到

$$V_{SCDMN}=\frac{x^3\sqrt{3}}{16},$$ 容易看出，

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}SO\cdot x^2=\frac{x^3\sqrt{3}}{6}.$$

现在清楚了，

$$\frac{V_{SCDMN}}{V_{ABCDMN}}=\frac{V_{SCDMN}}{V_{SABCD}-V_{SCDMN}}=\frac{3}{5}.$$

在求某个角的问题中，有时引入辅助线段可大显效益。

问题3 在正三棱锥中有一个内切球，已知棱锥体积与球体积的比等于$\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$。确定棱锥侧面对底平面的倾角。

解 如果一个球内切于正棱锥，则它的中心在棱锥的高上，且球与底面切于底面的中心，而与侧面切于棱锥侧高上一点．设$\angle SDO=\varphi$(图3)，

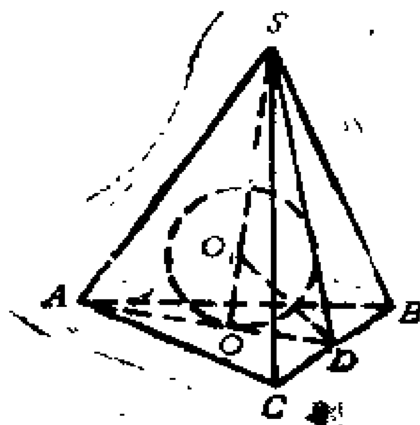


图 3

$BC=x$. 因为 $OD=\frac{x\sqrt{3}}{6}$，$SO=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi$. 所以

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{x^3}{24}\operatorname{tg}\alpha.$$

因为 O_1D 是 $\angle SDO$ 的平分线，$\angle O_1DO=\frac{\varphi}{2}$，所以

$O_1O=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ 且球的体积等于 $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$.

由条件我们得到方程

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=9.$$

通过 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ 的表达式代换 $\operatorname{tg}\varphi$. 得出

$$9\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}-9\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+2=0.$$

由此 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

或者 $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

想一想，这个问题中的什么条件对应着两个可能的 φ 值.

当问题条件中给出的线段和角在不同的平面上时，在这种情况下引入辅助元素(线段或者角)常常是有益的. 这时我

们希望，引进的元素与给定的元素处于一个三角形中.

问题 4 正四棱锥顶点处的面角等于 α，而棱锥的高为 h，确定棱锥的体积.

解 设 $SD=x$（图 4），作侧高 SE，由 $\triangle SDE$ 求得

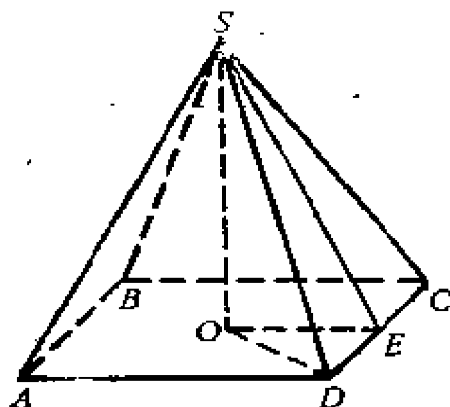


图 4

$$DE=x\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$CD=2x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$ 因此

$$V=\frac{4}{3}x^2h\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$ 现在我们通过 h 和 α 表示 x^2 为此考察 $\triangle SOD$，有 $SD^2=SO^2+OD^2$，但

$$OD=CD\times\frac{\sqrt{2}}{2}=x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$x^2=h^2+2x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$ 由此 $$x^2=\frac{h^2}{\cos\alpha}.$$ 因此

$$V=\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

我们利用引入辅助角来解本题.

设 $\angle SDO=\varphi$. 由 $\triangle SDO$ 得

$DO=h\operatorname{ctg}\varphi$，$CD=h\sqrt{2}\operatorname{ctg}\varphi$. 这样一来，

$V=\frac{2}{3}\cdot h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$.剩下我们通过角 α 的函数来表示 $\mathrm{ctg}^2\varphi$.

为此引进辅助线段 SD，设 $SD=x$．则 $DE=x\sin\frac{\alpha}{2}$，

$OD=x\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$，

$$\cos\varphi=\frac{OD}{SD}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

故
$$\mathrm{ctg}^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

同样得到前面的答案.

在所给出的情况中，问题的第二种解法比第一种解法稍长一些.

引入辅助线段经常帮助解决这类问题，在问题的条件中已知角和某些非线性元素(例如体积)，而需要求的是另外的非线性元素(表面积，截面面积，原来的体积或者某些同它们有关的图形).

问题 5 圆锥内接于表面积为 S 的球中，圆锥的母线与底面之间的角等于 α．确定圆锥全表面积 S'.

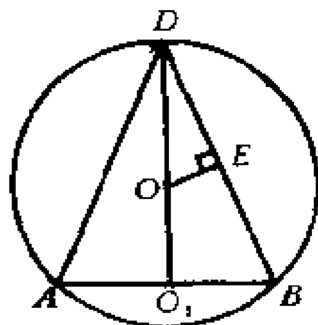


图 5

解 如果圆锥内接于球，则球心在圆锥的高上或在高的延长线上．被研究的组合图形的轴截面是大圆中的圆内接等腰三角形.

如果 $\alpha\geqslant45°$，则球的中心

O在圆锥的高线上(图 5).设$DB=x$，则由$\triangle DBO_1$求得

$$O_1B=x\cos\alpha.$$

$$S'=\pi O_1B\cdot(DB+O_1B)=\pi x\cos\alpha\cdot(x+x\cos\alpha)$$

$$=2\pi x^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

显然，$\angle DOE=\angle DBO_1=\alpha$.和$DE=\frac{x}{2}$.由$\triangle DOE$

得到$DO=\frac{x}{2\sin\alpha}$和

$$S=4\pi\cdot\frac{x^2}{4\sin^2\alpha}=\frac{\pi x^2}{\sin^2\alpha},$$ 由此，$\pi x^2=S\sin^2\alpha$，

这样一来，

$$S'=2S\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=S\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

容易看到，当$\alpha<45^\circ$时，我们进行的讨论仍然有效.

练　习　题

1．在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，延长$\triangle ABC$的三条高线交它的外接圆于点M，N，P，求三角形ABC和MNP面积之比.

2．已知一个正n棱锥底面与侧面的外接圆是合同（全等）的，求正n棱锥与它的内切球的体积之比.

3. 正三棱锥的顶点是与锥的底面相切的一个球的中心.棱锥的侧面积对球表面积之比等于 a .确定棱锥侧棱对底面平面的倾角.

4. 内切于圆锥的球的表面积等于圆锥的底面积. 求圆锥轴截面的顶角的余弦.

5. 已知正三棱锥的顶点处的面角为 α，且底面一个顶点到它所对侧面的距离为 a，求正三棱锥的体积.

6. 已知正四棱锥的底边等于 a，而侧面之间的二面角等于 α，试确定正四棱锥的体积.

7. 棱锥的底面是面积为 S 的直角三角形，它的一个锐角为 α.过这一个角所对的直角边的侧面垂直于底面，另外两个侧面与底面的交角都等于 β，求棱锥的体积.

8. 表面积为 S 的球内切于一个圆锥，圆锥的母线与底面之间的角等于 α.确定圆锥全表面积.

译自《量子》1981年第9期

四、辅助立方体

M.利别尔松

在解立体几何习题时，在第一步就经常产生困难.为了想象相应的图形，必须具有很好的几何想象的能力.如果谈及的是我们日常生活中遇到的几何体(立方体、球体、圆柱、平行六面体等等)，那么，这些对象是容易想象的，怎样描绘它们也是已知的.但有些描绘表示则是相当困难的.例如，异面直线，或者空间直线与平面的总体，并没有简单表示，只能依靠作平面图帮助解题.

在许多情况下，存在着一种可能克服困难的方法.它是基于下列的设想：如果空间的构形难于理解，并且它没有与具体的几何体联系，那么，力求人为地把它同某个物体，例如立方体联系起来.

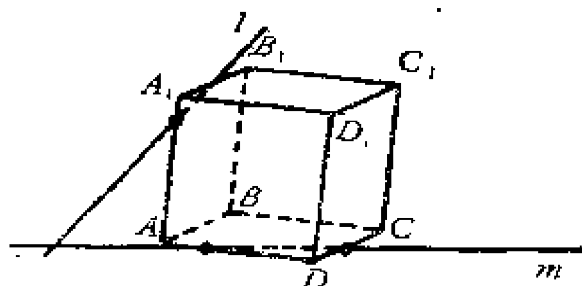


图 1

在纸上画一个立方体可便于我们的想象.在图1中，例如，能够明显地看出，直线l和m是异面直线。当拿掉立方体(图2)，空间直观性消失了，我们看到的异面直线l和m在一个



图 2

平面上.

另一个例子，画在立方体上的由一点 A_1 出发的三条射线 l，m，n.（图 3），明显地，它们是三面角的三条棱.在图 4 中立方体没有了，所以画面就成为平面的.为了在图中看出这个三面角，我们应当努力强迫自己想象它.

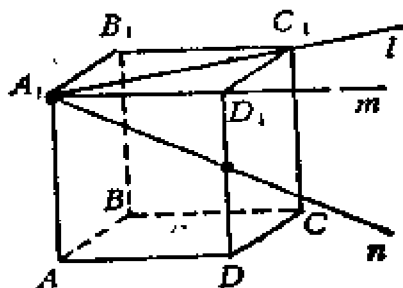


图 3

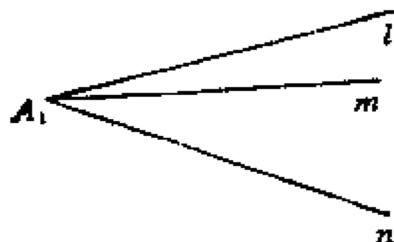


图 4

利用辅助立方体不仅"变"平面图形有立体感，而且指出了解决一系列问题的途径.在下列的例题中我们进行演示.

问题 1. 三面角的面角等于 45°，45°，60°.通过它的顶点引直线垂直于面角为 45°的一个界面.求这条直线与这一界面的对棱之间的夹角.

解 我们考察辅助立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$（图 5）.我们引它的两个相邻面的对角线 AB_1 和 AC.有 $\angle B_1AB = 45°$，$\angle BAC = 45°$.作为正三角形 AB_1C 的角，$\angle B_1AC = 60°$.因此，三面角 AB_1BC 正是问题条件中谈到的三面角.通过它的顶点 A 引棱 AA_1 并且垂直于界面 BAC，意味着，需

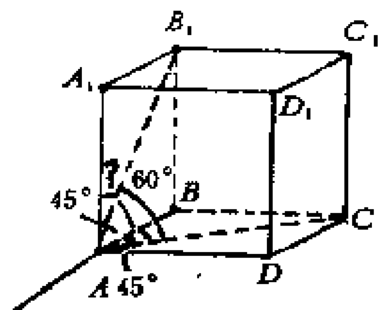


图 5

要求$\angle A_1AB_1$的量值.答案是显然的，$\angle A_1AB_1=45°$.

不利用辅助立方体求解这个问题，将十分复杂冗长.

问题 2 三面角的两个界面间的角是直角，而这两个界面上每个面角的值都是α.求第三个界面上面角的值.

解 首先我们认为角α是锐角.设辅助立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$(图 6)的顶点A是三面角的顶点，而线段AM，AB，AN是它的棱.(如果$\alpha>45°$，则点M和N位于棱BB_1和BC的延长线上).需要求角MAN.

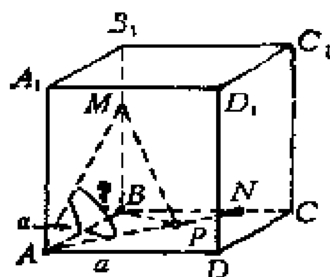


图 6

由点M向线段AN引垂线MP,并且联结点B和P.根据三垂线定理线段BP垂直于线段AN.由直角三角形APB和ABM我们得到:

$AP=AB\cos\alpha$，$AM=\dfrac{AB}{\cos\alpha}$.所求的角$MAN$是直角三角形$APM$中的锐角，因此

$$\cos\angle MAN=\frac{AP}{AM}=\frac{AB\cos\alpha\cos\alpha}{AB}=\cos^2\alpha,$$

$$\angle MAN=\arccos(\cos^2\alpha).$$

如果角$\alpha=90°$，则所求角是直角，同样可以写成所得到的关系式.

于是，在所有情况下解答是一个：$\arccos(\cos^2\alpha)$.

我们见到，在立方体中表示有两个界面垂直的三面角是方便的.这与立方体中包含有直二面角相联系.由于在立方体

中放置上"线性尺寸"，——它的棱的长度，这又给出了在图中表示距离量的可能性.

问题 3 等腰三角形 MNK 的底边 MN 和顶点 K 在以 l 为棱的直二面角不同的界面上. 点 M 和 K 与 l 的距离都等于 a. 点 N 在棱 l 上的射影与点 M 和 K 在棱 l 上的射影等距离. 如果 MK 与 l 形成的角等于 $60°$，求点 N 到 l 的距离.

解 设辅助立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的棱长等于 a. 界面 AA_1B_1B 和 $ABCD$ 形成问题条件中的二面角(图 7)，则点 M 在棱 A_1B_1 上，点 K 在棱 CD 上（或者在它们的延长线上）. 使点 M 与立方体的顶点 A_1 结合在一起. 设点 K 在棱 CD 上（它可以在棱 CD 的延长线上顶点 D 的外面，而不改变我们的讨论）.

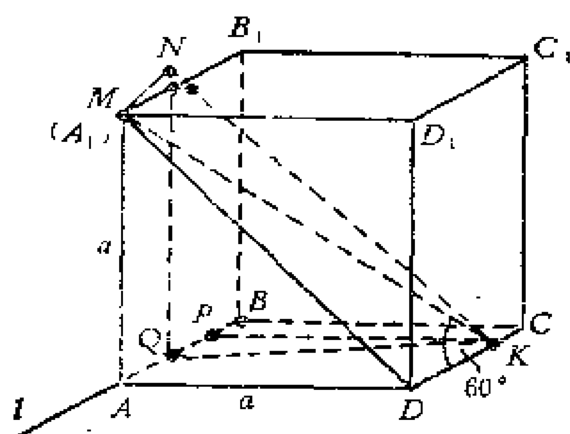


图 7

我们向棱 AB 引垂线 KP 并且取线段 AP 的中点 Q. 在 AMB_1B 的平面上由点 Q 向棱 AB 引垂线. $\triangle MNK$ 的顶点 N 在这条垂线上，因为它的射影 Q 与点 M 和 K 的射影距离等远. 我们发现，点 N 的位置高于棱 MB_1；否则，$\triangle MNK$ 不是等腰三角形.

我们连线段 MD 和 KQ. 作为边长为 a 的正方形的对角线，$MD = a\sqrt{2}$. 根据条件，异面直线 AB 和 MK 之间的角等于 $60°$，但直线 CD 平行于直线 AB，因此，$\angle MKD = 60°$. 从直角 $\triangle MDK$ 我们求得：

$$MK=\frac{MD}{\sin 60^\circ}=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad DK=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

根据条件，$NK=MK$ 和 $AP=DK$.则

$$QP=\frac{1}{2}\cdot AP=\frac{1}{2}DK=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

由直角$\triangle QPK$，求得

$$QK^2=QP^2+KP^2=\frac{7a^2}{6}.$$

最后由直角$\triangle NQK$，我们得

$$NQ=\sqrt{NK^2-QK^2}=\sqrt{MK^2-QK^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{6}.$$

问题得解.

问题 4 在$\triangle LMN$ 中，已知$\angle LNM=90^\circ$，$\angle MLN=30^\circ$.通过L点在空间引线段LN的垂线，在垂线上取点F，使$LF=MN$.$\triangle LMN$ 和$\triangle LNF$ 所属的两个半平面所成的二面角等于60°.求直线LM 和NF 之间的锐角.

解 安放三角形LMN 在辅助立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的界面上，正象图 8 中指出的那样，即点L同顶点A_1重合，点N同顶点A重合.设$MN=a$.在立方体的上、下界面分别引线段LP 和NQ，使得$\angle PLD_1=\angle QND=60^\circ$.平面$LNDD_1$与$LNQP$形成的二面角等于$60^\circ$.在线段$LP$上取点$F$，使得

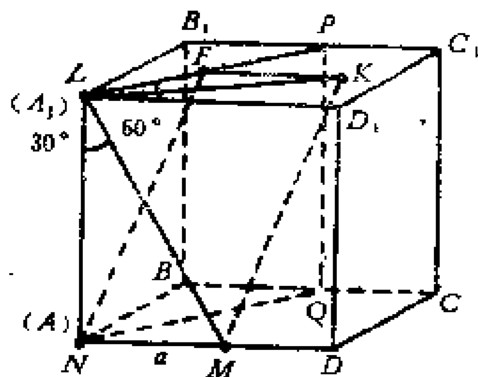


图 8

$LF=MN=a$.联点N和F，图与问题条件完全相符合.

我们求直线LM与NF之间的角，通过点F引平行于棱LD_1的线段FK并且使FK的长等于a.点K同点M和L连结，因为直线MK平行于直线NF(四边形$NFKM$是平行四边形)，角LMK是所求的角.由直角三角形LNM，求得$LM=2a$.三角形LNM和NLF相等(根据两个直角边)，所以$NF=LM=2a$.这意味着$KM=2a$.在三角形LFK中$LF=FK=a$，$\angle LFK=120°$，由此，$LK=a\sqrt{3}$.由$\triangle LMK$

求得
$$\cos\angle LMK=\frac{LM^2+KM^2-LK^2}{2LM\cdot KM}$$

$$=\frac{8a^2-3a^2}{2\cdot 4a^2}=\frac{5}{8}.$$

即
$$\angle LMK=\arccos\frac{5}{8}.$$

问题5 两条异面直线间所成的角等于60°.点M在其中一条直线上，点N在另一条直线上.同时，由这两点的每一个到异面直线公垂线的距离是一致的，都等于二异面直线间的距离.公垂线与直线MN之间的锐角取什么值?

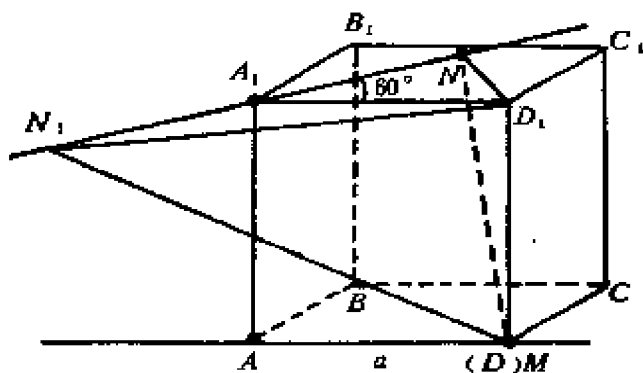


图 9

解 设异面直线中一条通过辅助立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$

的顶点A和D。第二条直线通过顶点A_1引出，在界面$A_1B_1C_1D_1$的平面上与棱A_1D_1成60°角(图9)。则棱AA_1是已知二异面直线的公垂线。它们之间的距离等于立方体的棱长a，这意味着点M和N与线段AA_1的距离等远都是a。点M与点D重合。放置点N可以有两个方案。

1. 点N在界面$A_1B_1C_1D_1$的内部。

引线段ND_1和MN。$\triangle A_1ND_1$是等边的。因此，$ND_1=a$。所求的直线MN和AA_1之间的角等于角NMD_1，因为直线AA_1平行于MD_1。在$\triangle ND_1M$中，

$$ND_1=MD_1=a,\ \angle MD_1N=90°.$$

意味着$\angle NMD_1=45°$。

2. 点N在界面$A_1B_1C_1D_1$的外部(在图9中的点N_1)。

我们引线段N_1D_1和MN_1。$\triangle N_1A_1D_1$是顶角为120°腰等于a的等腰三角形。因此，$N_1D_1=a\sqrt{3}$。角N_1MD_1等于所求的直线AA_1与MN_1之间的角。由$\triangle N_1D_1M$，求得$\angle N_1MD_1=60°$。

我们看到，引入辅助立方体实质上是简化了解答。在下面的问题中，正如在问题1那样，我们多亏有了辅助立方体，不用计算就求得需要的角。

问题6 棱锥$HPQR$的底面是等腰直角三角形PQR，它的斜边长PQ等于$2\sqrt{2}$。棱锥的侧棱HR垂直于底面，它的长等于1。求下述二异面直线所成的角及二异面直线的距离：二异面直线中的一条通过点H和棱PR的中点，而另一条通过点R和棱PQ的中点。

解 设辅助立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的棱长等于2。则每个界面对角线的长等于$2\sqrt{2}$。安放棱锥$HPQR$在立方体内部，使得P、Q和R分别与点D、B和C重合(图10)。

点H同棱RC_1的中点重合。

连结点H与棱PR的中点S，引立方体下底界面的对角线RA，对角线RA和PQ的交点T是线段PQ的中点。我们需要求异面直线HS和RT之间所成角的值和这二异面直线间的距离。

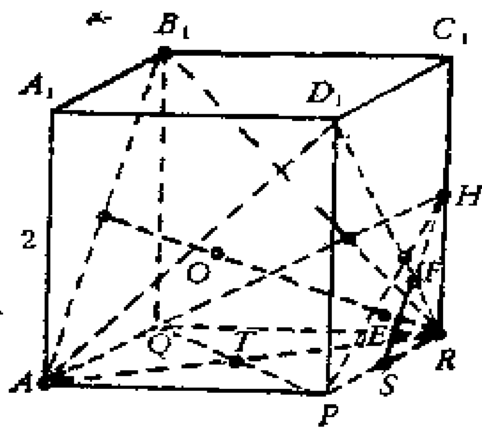


图 10

我们引立方体侧界面的对角线C_1P，B_1A和B_1R。显然，线段HS平行于线段B_1A。所以所求的角—这是角B_1AR，等于60°（$\triangle B_1AR$是等边三角形）。

现在我们注意，$\triangle B_1AR$的平面包含线段RT，并且这个平面平行于HS。所以，所求的距离等于直线HS与平面B_1AR之间的距离。

我们考察底面为B_1AR，顶点为D_1的正四面体。设D_1O是四面体的高。由线段D_1R和HS的交点F向线段RO引垂线垂足为E。因为线段FE平行于线段D_1O，线段FE垂直于平面B_1AR。意味着所求的距离等于FE。由$\triangle D_1OR$和FER相似，

$$\frac{FE}{D_1O}=\frac{FR}{D_1R}=\frac{1}{4}.$$

剩下求四面体的高D_1O。在直角$\triangle D_1OR$中斜边$D_1R=2\sqrt{2}$，而直角边RO等于边长为$2\sqrt{2}$的正三角形B_1AR的高的$\frac{2}{3}$。也就是$RO=\frac{2\sqrt{6}}{3}$。则

$$D_1O=\sqrt{D_1R^2-RO^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$最后，

$$FE=\frac{1}{4}D_1O=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练 习 题

1． 在三面角 $OABC$ 中界面 OAB 和 OBC 之间的角是直角，其余两个二面角中每一个的量值都等于 γ. 求面角 AOC 的量值.

2． $\triangle ABC$ 的顶点 B 和 C 在棱为 l 量值为 45° 的二面角的不同界面上. 边 AC 垂直于一个界面且同界面相交于自己的中点. 线段 BC 在另一界面上的射影平行于棱 l 且按长度来说等于点 C 到 l 的距离. 求三角形 ABC 的各角.

3． 在直角三角形 ABC 中，直角边 AC 是直角边 BC 的三倍. 通过点 B 在空间引直线垂直于线段 BC，且在这直线上取点 D，使得 $BD=AC$. $\triangle BCD$ 和 ABC 所属的半平面之间的二面角等于 45°，求直线 AB 和 CD 之间的锐角.

4． 两条异面直线间的角等于45°. 点 M 在其中一条直线上，点 N 在另一条直线上. 异面直线间公垂线的长是点 M 到它的距离的两倍，是点 N 到它距离的三分之二、求异面直线公垂线与直线 MN 之间的角.

5． 正四面体 $SABC$ 的棱长等于 1，BD 是 $\triangle ABC$ 的高线. 等边 $\triangle BDE$ 在同棱 AC 形成角 φ 的平面上，同时点 S 和 E 在平面 ABC 的同一侧. 求点 S 和 E 之间的距离.

译自《量子》1986 年第 5 期

五、坐标方法

Э·希瓦罗娃

向量代数与坐标法是解许多几何问题的强有力的工具. 首先，它们不需要考察复杂的几何构形，这种方法把几何问题化为代数问题，它的解法比原来的几何解法要容易得多.

本文向读者介绍坐标方法.

1. 计算角

问题1 已知三面角的两个面角的值：$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$. 如果对第三个面角的二面角是直二面角$\left(\alpha<\frac{\pi}{2}，\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，求第三个面角.

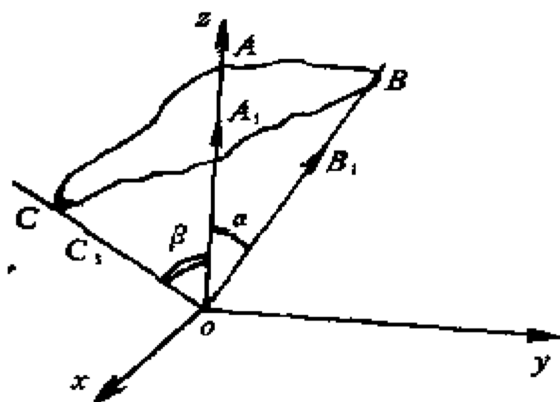


图 1

解 我们建立直角坐标系. 它的原点同已知三面角的顶点 o 重合在一起，oz 轴沿着直二面角的棱 oA 的方向，轴 ox 在平面 AoC 上，轴 oy 在平面 AoB 上（图1），需求 $\angle BoC$. 在棱 oA，oB 和 oC 上放置单位向量 $\overrightarrow{oA_1}$，$\overrightarrow{oB_1}$ 和 $\overrightarrow{oC_1}$. 则

$$\overrightarrow{oA_1}=(0，0，1)，$$

$$\overrightarrow{oB_1}=(0,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha),$$

$$\overrightarrow{oC_1}=(\sin\beta,\ 0,\ \cos\beta).$$

因为 $$\cos\angle BoC=\frac{\overrightarrow{oB_1}\cdot\overrightarrow{oC_1}}{|oB_1|\cdot|oC_1|},$$

则

$$\text{cso}\angle BoC=\frac{0\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot\cos\beta}{1.1}$$

和 $$\angle BoC=\operatorname{arc}\cos(\cos\alpha\cos\beta).$$

问题2 求直平行六面体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1和它的界面对角线 A_1D 之间的角．如果 $|AD|=a$，$|DC|=b$，$|DD_1|=c$．

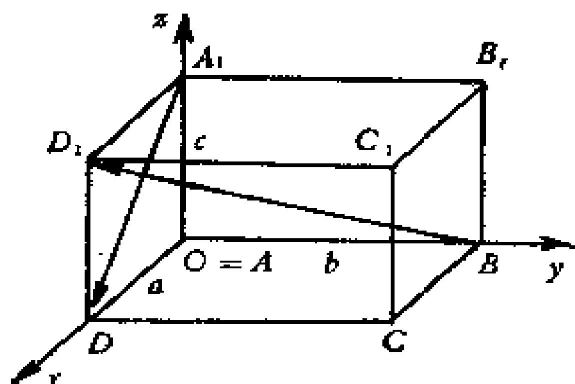


图 2

解 建立直角坐标系象图2给出那样，在这个坐标系中，

$$\overrightarrow{AD}=(a,\ 0,\ 0),$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,\ b,\ 0),$$

$$\overrightarrow{AA_1}=(0,\ 0,\ c)$$

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=(a,-b,c),$$

$$\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}=(a,0,-c).$$

由此得出

$$\cos(\overrightarrow{BD_1}\widehat{,}\ \overrightarrow{A_1D}) = \frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}.$$

因为用这两条直线所确定的诸角中最小的角的值叫做两条直线之间的角，则当 $a^2-c^2\geqslant 0$ 时所求的角等于

$$\arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}},$$

而当 $a^2-c^2<0$ 时，它等于

$$\pi-\arccos\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

考虑到公式　$\pi-\arccos t=\arccos(-t)$，

答案可以写作这样的形式：

$$(BD_1\widehat{,}A_1D)=\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

2．异面直线间的距离．

问题 3　求棱长为 a 的立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的两个相邻界面的对角线 AD_1 和 DC_1 之间的距离．

解　象图 3 指出那样建立直角坐标系，在这个坐标系中，

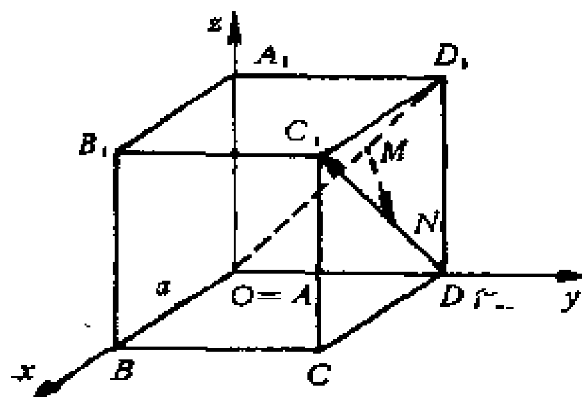


图 3

$$\overrightarrow{AB}=(a,\ 0,\ 0),$$
$$\overrightarrow{AD}=(0,\ a,\ 0),$$
$$\overrightarrow{AA_1}=(0,\ 0,\ a),$$
$$\overrightarrow{AD_1}=(0,\ a,\ a),$$
$$\overrightarrow{DC_1}=(a,\ 0,\ a).$$

所求的距离等于直线 AD_1 和 DC_1 的公垂线

MN的长. 可以用下面方法计算，通过α和β表示两个数来确定点M和N的位置：

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AD_1},\ \overrightarrow{DN}=\beta\cdot\overrightarrow{DC_1}.$$

（因为点M在直线AD_1上当且仅当向量$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AD_1}$共线并且对点N也类似）. 现在我们求

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}.$$

我们写向量$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AD_1}$及$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{DC_1}$垂直的条件. 这给我们两个方程，由它我们求α和β，然后求向量$\overrightarrow{MN}$的长.

我们进行必要的计算：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\&=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\&=-\alpha\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{DC_1}\\&=(\beta a,\ a(1-\alpha),\ a(\beta-\alpha)).\end{aligned}$$

我们写标积$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD_1}$和$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DC_1}$为坐标形式，令它们等于0（两个向量垂直的条件）我们得方程组：

$$\begin{cases}a^2(1-\alpha)+a^2(\beta-\alpha)=0\\a^2\beta+a^2(\beta-\alpha)=0,\end{cases}$$

由此，

$$\begin{cases}1+\beta-2\alpha=0,\\2\beta-\alpha=0,\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\beta=\dfrac{1}{3}$，现在

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3},\ -\frac{a}{3}\right),$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

问题 4 在空间给出两条不共面的射线 AM 和 BK，所形成的角是 $\frac{\pi}{2}$。线段 AB 是它们的公垂线，在射线 AM 和 BK 上取点 E 和 F，使得

$$2|AE|\cdot|BF|=|AB|^2.$$

求证 线段 AB 的中点 C 到直线 EF 的距离等于 $\frac{AB}{2}$。

证明 如图 4 那样建立直角坐标系，所求的距离等于 $\triangle CEF$ 的高线 CD。如果知道边 EC 的长和角 CED 的值，可以由 $\triangle CDE$ 求这个高线 DC。我们设 $\varphi=\angle CED$，$|AB|=a$，$|BF|=p$，$|AE|=m$，则根据条件 $2mp=a^2$。我们写出某些点和向量的坐标：

$$C\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right),\ E(m,0,0),\ F(0,p,a);$$

$$\overrightarrow{EC}=\left(-m,\ 0,\ \frac{a}{2}\right),\ \overrightarrow{EF}=(-m,p,a).$$

我们有

$$\cos\varphi=\cos(\overrightarrow{EF},\widehat{\ }\overrightarrow{EC})$$

$$=\frac{m^2+\frac{a^2}{2}}{\sqrt{m^2+p^2+a^2}\sqrt{m^2+\frac{a^2}{4}}}.$$

以 m 和 p 的表达式来代替 a^2，考虑到 $m>0$，和 $p>0$，我们得到：

$$\cos\varphi=\frac{m^2+mp}{(m+p)\sqrt{m^2+\frac{mp}{2}}}=\frac{m}{|\overrightarrow{EC}|}.$$

由此可见，$\angle AEC=\varphi$（由$\triangle AEC$），所以

$|CD|=|CA|=\frac{a}{2}$.

还可以求得 $|ED|=|EC|\cos\varphi=m$，

然后根据勾股定理 $|CD|$ 或者

$|CD|=|CE|\sin\varphi=|CE|\sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

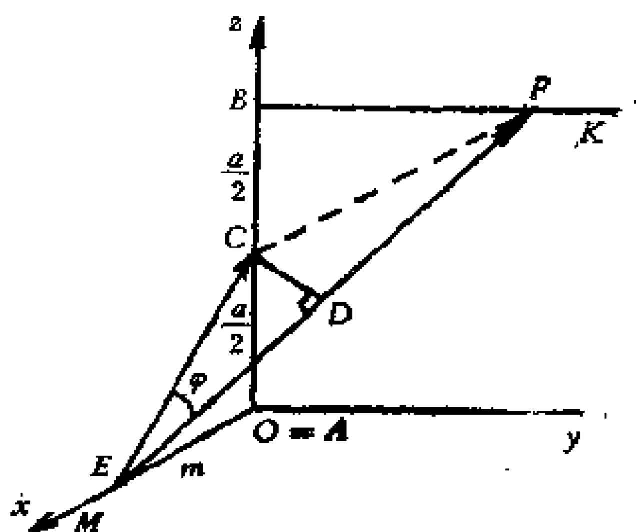


图 4

3. 截面问题.

通常在这样的问题中需要求截面多面体的面积（也就是它的形状和面积）. 在截面得到的多边形，它的顶点是割平面与多面体棱的交点，而边是割平面交多面体界面的直线段.

提醒大家注意，割平面交平行的平面为平行的直线——这常对解题有帮助. 例如，在立方体的截面中就是这样. 在截面面积计算中，联系图形面积和它射影面积的公式 $S_{射影}=S_{截}\cos\varphi$ 是有效的公式. 一般不必找出截面，直接用这个公式可立刻给出它的面积.

问题 5 求棱长为 1 的立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 用通过顶点 A，棱 BC 中点和界面 CDD_1C_1 中心作的平面去截，截得截面的形状和面积.

解 如图 5 指出那样建立直角坐标系. 割平面的方程，作为一般的平面方程具有形式

$$ax+by+cz+d=0.$$

系数 a、b、c、d 之间的关系可以由点 A (0, 0, 0)、

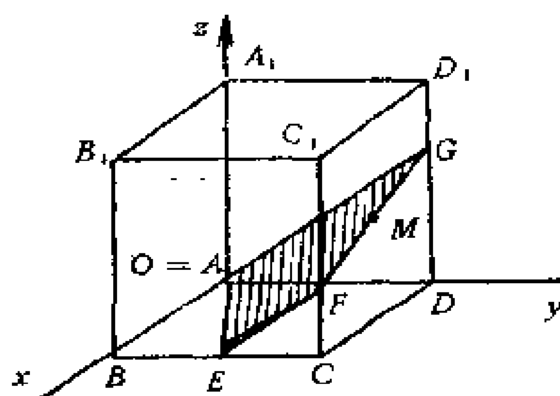


图 5

$E\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$（棱 BC 的中点）和 $M\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$（界面 CDD_1C_1 的中心）在这个平面上去寻求，也就是这些点的坐标应当满足平面方程．由此我们得到方程组

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot 1+b\cdot \frac{1}{2}+c\cdot 0+d=0, \\ a\cdot \frac{1}{2}+b\cdot 1+c\cdot \frac{1}{2}+d=0. \end{cases}$$

由这个方程组，我们得到 $d=0$，$b=-2a$，$c=3a$，也就是割平面方程具有形式

$$ax-2ay+3az=0.$$

对不同的 a（不等于 0）我们得到的方程是同一个平面的方程(为什么?)．所以我们设 $a=1$，则割平面方程是 $x-2y+3z=0$．现在容易求得割平面同正方体棱的交点的坐标．F 点的坐标应取形式 $F(1,\ 1,\ f)$，因为点 F 在直线 CC_1 上，此外，点 F 在割平面上，这给出方程

$$1-2\cdot 1+3\cdot f=0.$$

由此，$f=\frac{1}{3}$．于是，$F\left(1,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$；类似求得 $G\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$．于是，显然截面是个四边形，同时是梯形（$AG \parallel EF$）．可以求出梯形的底和高，根据它们得到梯形的面积．但我们可引入另外更简单的解法．截面 $AEFG$ 在平面 $ABCD$ 的射影是四边形 $AECD$，它的面积等于$\frac{3}{4}$．平面 $AEFG$ 和 $ABCD$ 之间角的余弦等于垂直于这两个平面的向量，例如 $\vec{n}_1=(1,\ -2,\ 3)$以及 $\vec{n}_2=\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\ 1)$之间角的余弦的绝对值．所以．

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 0+3\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

因此，

$$S_{AEFG}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{\sqrt{14}}}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

问题 6　通过立方体的一条对角线作平面交这个立方体，使得截面面积最小，这个截面应当是怎样的？

解　设割平面通过立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的对角线 AC_1 交

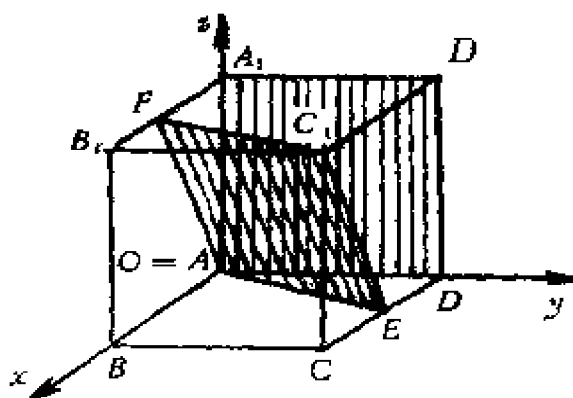


图 6

棱 CD 于点 E（当割平面交其它棱的情况，绕对角线 AC_1 旋转立方体并且改变记号归结为这种形式）. 正如图 6 指出的那样建立直角坐标系. 立方体的棱长假设等于 1（为什么能作这一点?），立方体的截面是平行四边形 AEC_1F（点 A，E，C_1 属于截面，所以点 F 由条件 $C_1F \parallel EA$，$AF \parallel EC_1$ 来决定）. 它在界面 ADD_1A_1 上的射影是这个界面自身，所以 $S_{AEC_1F}=\dfrac{S_{ADD_1A_1}}{\cos\varphi}=\dfrac{1}{\cos\varphi}$，其中 φ 是平面 AEC_1F 和 ADD_1A_1 之间二面角的值. 我们感兴趣的是 $\cos\varphi$ 的最大值. 进一步可以象上题那样的运算，我们求某些点的坐标：

$A(0,0,0)$，$C_1(1,1,1)$，$E(e,1,0)$（点 E 的横坐标暂时还不知道）；然后求平面方程：

$$AEC_1F: \quad 1\cdot x-e\cdot y+(e-1)z=0,$$

$$ADD_1A_1: \quad 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0;$$

然后求垂直于这两个平面的向量

$$\vec{n}_1=(1,\ -e,\ e-1),$$

$$\vec{n}_2=(1,\ 0,\ 0),$$

并且求它们之间的角的余弦：

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+e^2+(e-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e^2-e+1}}.$$

$\cos\varphi$ 的最大值在 e^2-e+1 达到最小值时才达到，而 e^2-e+1 又当 $e=\dfrac{1}{2}$ 时才达到最小值（检验!）. 于是点 E 应是棱 CD 的中点.

4． 棱锥和球

问题 7 底边长为 a 的正三角形的棱锥内接在球面中．棱锥的两个侧面垂直于底平面，第三个侧面同底平面形成的二面角等于 φ，求球面面积．

解 如果棱锥的两个侧面垂直于底平面，则这两个侧面相交的侧棱，垂直于底．我们通过 S 表示棱锥的顶点，我们考察的棱的第二个端点用 O 表示，底面另外两个顶点用 A 和 B 表示并且如图 7 指出的那样建立直角坐标系．正如已知，棱锥外接球面的球心 O_1 在棱锥底面的射影是底面外接圆的中心 O_2．

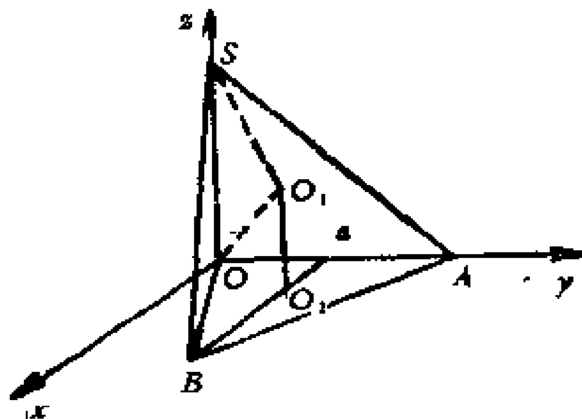


图 7

我们求某些点的坐标(图 7)：

$$O(0,\ 0,\ 0),\ A(0,\ a,\ 0),$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2},\ 0\right),$$

$$O_2\left(\frac{a}{2\sqrt{3}},\ \frac{a}{2},\ 0\right).$$

我们通过数 s 和 h 来刻画点 S 与 O_1 的位置：

$$S(0,\ 0,\ s),O_1\left(\frac{a}{2\sqrt{3}},\ \frac{a}{2},\ h\right).$$

则我们能写出两个方程：第一个是距离 $|O_1S|$ 和 $|OO_1|$ 相等(距离 $|OO_1|$，$|O_1A|$ 和 $|O_1B|$ 相等将自然成立，因为 $|O_1O_2|\perp(OAB)$ 且 O_2 是 $\triangle OAB$ 的中心)，第二个是条件

$\cos((SAB),\widehat{\ }(OAB))=\cos\varphi$ 的坐标形式.

容易求得平面 SAB 的方程形为

$$\frac{s}{\sqrt{3}}x+s\cdot y+a\cdot z-a\cdot s=0,$$

同时向量 $\vec{n_1}=\left(\frac{s}{\sqrt{3}},\ s,\ a\right)$ 垂直于这个平面，而向量 $\vec{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$ 垂直于平面 OAB. 现在我们得到两个方程:

$$\sqrt{\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{4}+(h-s)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{4}+h^2},$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{s^2}{3}+s^2+a^2}}=\cos\varphi.$$

由第二个方程求得

$$s=\frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\varphi.$$

而此后由第一个 $h=\frac{\sqrt{3}}{4}a\operatorname{tg}\varphi.$

现在, $R^2=|OO_1|^2=\frac{a^2(16+9\operatorname{tg}^2\varphi)}{48}$ 和

$$S_{球面}=4\pi R^2=\frac{\pi a^2(16+9\operatorname{tg}^2\varphi)}{12}.$$

问题 8 棱锥的底是边长为 a 的正方形，在底面的棱上有两个二面角是直二面角，而另外两个二面角等于 φ. 求在这个棱锥中内切球的半径.

解　象图 8 指出的那样建立直角坐标系．球的中心 O_1 应当到棱锥各界面等距．特别地，与三个坐标平面的距离是 r —即球的半径．所以它的坐标具有形式 $O_1(r,r,r)$．平面 SBC 包含点 $B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，和 $S(0,0,a\operatorname{tg}\varphi)$．由此求得平面 SBC 的方程：

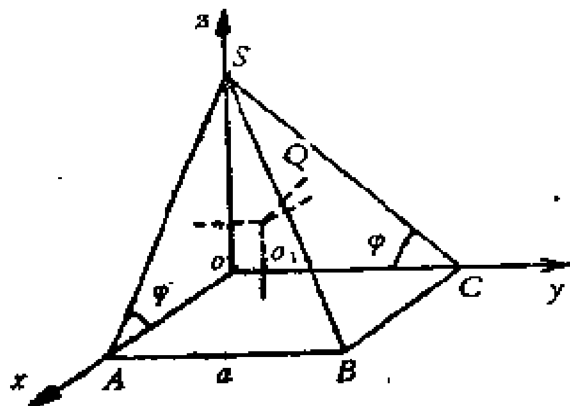


图 8

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot y-z-a\operatorname{tg}\varphi=0.$$

由点 O_1 到平面 SBC 的距离，从一个方面应当等于 r，从另一方面，它可以通过点 S，B，C 的坐标表示．垂直于平面 $SBC(Q\in(SBC))$ 的向量 $\overrightarrow{O_1Q}$ 与向量 $\vec{n}=(0,\operatorname{tg}\varphi,1)$ 共线（向量 $\vec{n}$ 的坐标由平面 SBC 的方程求得），所以

$$\overrightarrow{O_1Q}=h\cdot\vec{n}=(0,\ h\operatorname{tg}\varphi,\ h).$$

现在，已知道点 O_1 的坐标，我们求点 Q 的坐标

$$Q(r,\ h\operatorname{tg}\varphi+r,\ h+r),$$

并且 h 的值由点 Q 属于平面 SBC 的条件（也就是点 Q 的坐标满足平面 SBC 的方程）求得：

$$\operatorname{tg}\varphi(h\operatorname{tg}\varphi+r)+h+r-a\operatorname{tg}\varphi=0,$$

由此，$$h=(a\operatorname{tg}\varphi-r-r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi,$$

$$|\overrightarrow{O_1Q}|=|h|\cdot|\vec{n}|$$

$$=(a\operatorname{tg}\varphi-r-r\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$=(a\operatorname{tg}\varphi-r-r\operatorname{tg}\varphi)\cos\varphi.$$

（容易见到，$h>0$）．因为应当有$|\overrightarrow{O_1Q}|=r$，我们得到方程

$$(a\,\mathrm{tg}\,\varphi-r-r\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi=r,$$

由此求得r，

$$r=\frac{a\sin\varphi}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

练 习 题

1． 证明，正△ABC的面积可以按下面的公式计算：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2\cdot|AC|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

2． 直平行六面体两个相邻侧面的不相交的对角线对底平面的倾角分别是α和β，求这两条对角线之间的角．

3． 正四棱锥$SABCD$底面的边长等于a，高是h．求直线BD与SA之间的距离．

4． 四面体的棱长等于l．求四面体侧面上异面的高线之间的距离．

5． 直平行六面体的底面是带有锐角α的菱形．交这个平行六面体截面为正方形的平面对底平面倾角是多少？

6． 三棱锥$SABC$每个棱的长都等于1．点D是△ABC的高BD的垂足．等边△BDE在同棱AC形成角φ的平面上并且点S和E位于平面ABC的同一侧．求点S和E之间的距离．

7． 已知棱长为a的立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$，点E是棱A_1D_1的中点，点F是棱AA_1的中点．求通过点E和F并且切由平面BB_1C_1C和DD_1C_1C形成的二面角的界面的最小球面的半径．

附录　坐标法的基本公式

向量$\vec{a}$的坐标	$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x, y, z)$ $x=\vec{a}\cdot\vec{i}$, $y=\vec{a}\cdot\vec{j}$, $z=\vec{a}\cdot\vec{k}$
点M的坐标	如果$\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$，则$M(x, y, z)$
向量$\overrightarrow{AB}$的坐标同它的起点$A(x_1, y_1, z_1)$和终点$B(x_2, y_2, z_2)$坐标之间的关系	$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$
平移公式 $\vec{P}=(a, b, c)$, $M(x, y, z)$	$\vec{P}(M)=M_1(a+x, b+y, c+z)$
向量$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$与向量$\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$的和与差	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$
向量$\vec{a}=(x, y, z)$与数p的积	$p\vec{a}=(px, py, pz)$
非零向量$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$的数量积（标积）	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
向量$\vec{a}=(x, y, z)$的长	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
两点$A(x_1, y_1, z_1)$与$B(x_2, y_2, z_2)$之间的距离	$\lvert AB\rvert=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$
向量$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$之间的角	$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
位似中心为O，位似系数为k的位似公式。$M(x, y, z)$	$H_O^k(M)=M_1(kx, ky, kz)$
平面的方程	$ax+by+cz+d=0$

半空间的方程，以 α: $ax+by+cz+d=0$ 为界平面。	开的，包含点$O(0, 0, 0)$当 $ax+by+cz+d>0$ ｜ $d>0$ $ax+by+cz+d<0$ ｜ $d<0$ 闭的 $ax+by+cz+d\geqslant 0$ ｜ $d\geqslant 0$ $ax+by+cz+d\leqslant 0$ ｜ $d\leqslant 0$
垂直于平面α: $ax+by+cz+d=0$ 的向量	$\vec{n}_\alpha=(a, b, c)$
包含点$A(x_1, y_1, z_1)$并且垂直于向量$\vec{n}=(a, b, c)$ 的平面方程。	$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$
平面之间的角。 $\alpha: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $\beta: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ $\vec{n}_\alpha=(a_1, b_1, c_1)$ $\vec{n}_\beta=(a_2, b_2, c_2)$	$\cos(\widehat{\alpha,\beta})=\lvert\cos(\widehat{\vec{n}\alpha, \vec{n}\beta})\rvert$ $=\dfrac{\lvert a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$
在平面α上面积为s的多边形在平面β 上正交投影的面积 $S_{投影}$	$S_{投影}=S\cos(\widehat{\alpha, \beta})$
半径为R，中心在点$s(a, b, c)$的球面方程	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
切球 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$于点$A(m, p, q)$的平面方程	$(m-a)(x-a)+(p-b)(y-b)+(q-c)\cdot(z-c)=R^2$ $(a-m)(x-m)+(b-p)(y-p)+(c-q)\cdot(z-q)=0$

（本表由俄韦林金提供）

译自《量子》1977年第11期

六、几何习题中的图

Г·多罗菲耶夫，Н·罗左夫

在解几何题时，对于图的作用有不同的对待方式．有些人认为，对于一般问题，并不需要作图，但是这并不意味着能够草率从事．其它有些人认为，在推理过程中，图本身是充足的论据，甚至连“由图形看出”的说明以及必须的论证也无须指出．这两种极端的观点都是不正确的．

当然，任何图，甚至最准确的图，也不能代替逻辑证明，它只不过是对推理中的解释．展现在图中任意的几何事实，必须严格地论证——只有在那个时候才能断定事实成立，而不是由可靠的（或极端危险的、不可靠的）图得到的．它仅仅能够提醒人们利用某些定理或者找到恰当的补充作图法．为了使证明的思路更加明瞭，数学家总是常常求助于几何作图．

然而，也可能只有图才能帮助解决问题，正确地反映条件中提到的构形的实质性的几何特点．正因为如此．所以对于图应当非常细心的对待．

首先，能够做到的仅限于在某种程度上成功地构图，对于所作的图形确切地满足问题中的条件．然而在许多问题中，在原则上凭借着图使问题得到完全解决并不可能，因为问题的条件准许几何上有不同的构形．此外，这样的对于某种“随机的”图的依赖性导致另一种后果：在问题解决的进程中，可能发现所得的结果与所求的图形之间产生矛盾，它常常把问题引入绝路．然而，在正确理解图的作用的时候，

就会认为它并不奇怪．接着就放弃开始的印象并作出新图，突出反映几何内容（当然，是在进行推理和计算正确的条件下）．

在构图时，有益之处不在于构作关于几何外形的示范性的草图，而是力求逐步地凭借已知的问题及一般几何事实构图．用这样的方法，容易产生某种思路，把它能用到解法中去．

习题1 在三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=4$．在 BC 边上取一点 D，使得 $BD=1$．半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的圆周过点 B 与 D 并与点 B 在 $\triangle ABC$ 的外接圆周相切．试求 $\triangle ABC$ 的面积．

首先作 $\triangle ABC$，$\angle B$ 为直角（图 1）．为了作这个三角形的外接圆，我们首先要明确，它的圆心 O 的位置及其半径的大小．我们知道，直角三角形的外接圆圆心，位于斜边的中点，而它的半径等于斜边的一半．这就使得建立外接圆有了可能．

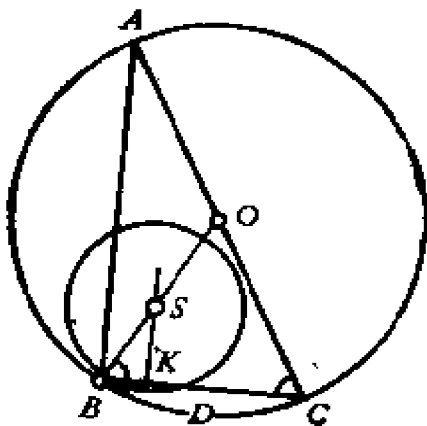


图 1

现在作另外的圆周．我们注意 BC 边上点 D，可以肯定，这个圆周的中心位于过线段 BD 的中点 K 所引的垂线上．由圆的切线的条件推知，我们所考虑的圆周中心位于过切点 B 所引的外接圆的半径上．或者说，圆的中心 S，按问题条件，是直线 SK 及中线 BO 的交点．

构图完成了．在构图的过程中，我们确立两个事实，以此作为解决问题的基础：首先，圆心S位于等腰$\triangle BOC$的边BO上；其次，由圆心S向直角边BC引垂线，交线段BD于它的中点．

现在进行必要的计算．由直角$\triangle BSK$，根据勾股定理得$SK=1$，此时$\operatorname{ctg}\angle SBK=\frac{1}{2}$．但$\angle ACB=\angle OBC$，因此$BC=AB\operatorname{tg}\angle ACB=2$．于是，三角形$ABC$的面积等于4．

因此，问题完全解决，我们得到的解题概念是由于逐次的构图．然而，骤然看来，这并不奇怪，在图1中描绘的，没有对应问题条件的全部．事实上，我们引用的计算证明，$BC=2$而$AC=\frac{2}{\sqrt{5}}$．因此$BO=\sqrt{5}=2SB$，即BO是以S为圆心的圆的直径，可见它过点O．换句话说，图2完全适合问题的条件．

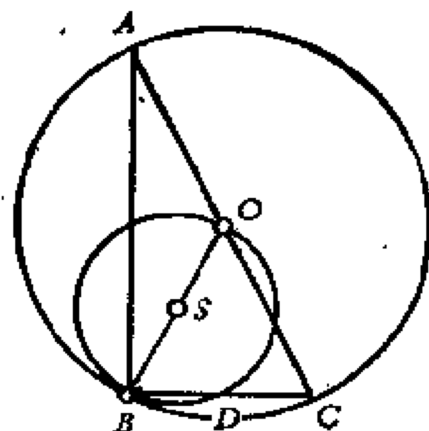


图 2

什么原因使得图1没有能够完全适合问题的条件呢？问题在于，我们引用的构图看来只是从几何方面，而没有考虑所有具体的数据．此外，它的所有的外形的尺寸大小以及几何学的确切形式，只有经过相应的计算才能得到，这是我们没能顾及到的．

但是，我们确认，以上不少解题的叙述局限在不精确的

图上．这可简单地比喻：在我们的推理中，什么地方也没用到以点O及以点S为圆心的圆的相互位置，因此没有必要在解题中着重说明它．

类似的情形在几何问题中是典型的．实际上什么时候也没有接近解决．我们不能在作图时绝对准确地把所有特殊的外形反映出来，它的许多特点仅在推理的过程才发现．因为，什么样的外形特点看来是实质性的与在什么程度上在所给的外形及图上是容许的，一望而知远非那么明显，所以，阐明存在于所给问题中的几何性质是极其重要的．

当然，如果弄清楚了在解题中的图明显没有和已知的问题相适应，那就应当把它换为正确的．例如，在以下问题中，甚至常见的几何的想象也不能够帮助马上作好图，准确反映构形上实质性的特点．

习题 2 在三棱锥$SABC$中，侧棱SC等于底边AB并与底面ABC成$60°$的角．已知顶点A，B，C．以及棱锥的侧棱中点都在半径为1的球上．证明：该球的球心在棱AB上，并求棱锥的高．

为了解题，作棱锥$SABC$．通常习惯，作棱锥的高SH并引入线段HC．因为按题已知条件$\angle SCH=60°$．由$\triangle CHS$得$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$，$HC=\frac{a}{2}$，此处a表示棱SC的长．

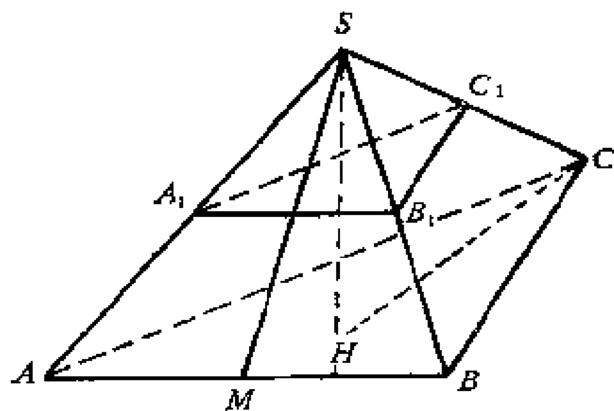


图 3

按条件，顶点A，

B，C与相应的侧棱中点A_1，B_1，C_1在一个球面上．因此，特别有A，A_1，B，B_1四点共圆——棱锥侧面SAB为球的截面．因为$A_1B_1 /\!/ AB$，则四边形AA_1B_1B为梯形，因为它有外接圆，所以是等腰的．从而

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SB.$$

对于四边形BB_1C_1C，类似的推理表明，棱锥$SABC$具有相等的侧棱：

$$SA = SB = SC = AB = a.$$

由此可见，$\triangle ASB$是等边的，也就是这个侧面的侧高等于$\frac{a\sqrt{3}}{2}$，即$SM = SH$．

这样一来，棱锥的高与侧面ASB的侧高重合．但是，此时H与M两点重合，而ASB与ABC两平面互相垂直．因此图3实际上不满足问题的条件，而符合问题条件的却是图4．

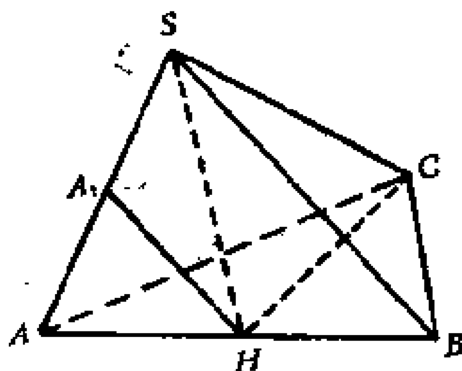


图 4

问题进一步的解没有任何困难．具有相同倾角的侧棱SA，SB，SC在平面ABC上的射影（图4）相等．$HA = HB = HC = \frac{a}{2}$，即点$H$——$\triangle ABC$的旁切圆心，因此球心位于底面由点$H$所作的垂线上，即在棱锥的高$SH$上（或在它的延线上）．这个球心距$A$，$A_1$两点等远．由于$HA_1 = \frac{a}{2}$是$\triangle ASB$的中线，则

$HA_1 = HA$，即点H在棱 AB 上，恰好它是球心．但是这个球的半径按条件等于1，$HA = \frac{a}{2} = 1$，$a = 2$与

$SH = \sqrt{3}$．

问题3 在等腰梯形内有两个圆．其中的一个圆，它的半径为1，内切于梯形，而第二个圆与梯形的两边及第一个圆相切．与第二个圆相切的梯形两边组成的角的顶点到两圆切点的距离是第二个圆的直径的两倍，试求梯形的面积．

到底梯形与第二个圆相切的底角是钝角还是锐角呢？直接由问题条件来看并不清楚．因此我们应当考虑两个方案（图5）并试作阐明，哪种方案是和条件中给出的具体的数值关系相符合．

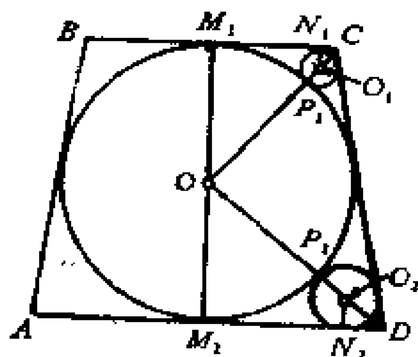


图 5

令O是内切于梯形$ABCD$的圆心．O_1，O_2为第二个圆的圆心（两个方案），P_1，P_2，M_1，M_2，N_1，N_2是切点．r_1，r_2表示第二个圆的半径．在第一种情形，$\triangle OM_1C \backsim \triangle O_1N_1C$，又在第二种情形$\triangle OM_2D \backsim \triangle O_2N_2D$，则有

$$\frac{OM_1}{O_1N_1} = \frac{OC}{O_1C}, \qquad \frac{OM_2}{O_2N_2} = \frac{OD}{O_2D},$$

又因 $OC = OP_1 + P_1C = 1 + 4r_1$，

$OD = OP_2 + P_2D = 1 + 4r_2$，

则在两种情形

$$\frac{1}{r}=\frac{1+4r}{3r}.$$

由此 $r_1=\frac{1}{2}$．由$\triangle OM_1C$与$\triangle OM_2D$，按勾股定理有

$$M_1C=2\sqrt{2},\quad M_2D=2\sqrt{2}.$$

这样，如果第二个圆内切于梯形的钝角边，则梯形较长的底边为 $4\sqrt{2}$．然而，如果在底边长度为 a 与 b 的等腰梯形中，内切圆半径之长为 d，则满足不等式 $a<d<b$——例如可由此得出，容易证明的非常有用的关系 $d=\sqrt{ab}$，因此在我们的问题中，梯形短的底边应当小于 2．因为圆心为 O_1的圆，不满足问题的条件，只得考虑圆心为 O_2的圆．现在容易求出梯形的面积 S．利用梯形底边与内切圆圆直径的关系 $d=\sqrt{ab}$，我们得到等式

$$2=\sqrt{AD\cdot BC}=\sqrt{4\sqrt{2}\cdot BC}.$$

由此 $$BC=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

与 $$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot 2=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

在所选择的问题中，存在两个根本不同的几何构形是十分明显的．但是问题往往不是这样，为了要达到“洞察”在解题中考虑的所有构形，就要求具有相应的几何想象力以及足够的严密性．

问题 4 直棱柱高的长度为 1，它的底面是边长为 2 及夹角为锐角 30°的菱形．过底边作与底面成 60°的截面，试求截面的面积．

许多入学试题中，如图 6 所作的那样，示范性地给出这个问题的如下“解法”：

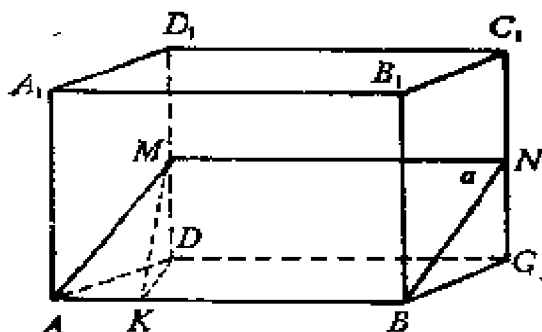


图 6

令 MN 为截面 α 与侧面 DCC_1D_1 的交线；过点 M 引底边 AB 的垂线 MK，由三垂线定理得，$KD \perp AB$。因此 $\angle MKD$ 是平面 α 与底面所成二面角的平面角，得 $\angle MKD = 60°$。此时，

$$MK = \frac{KD}{\cos 60°} = \frac{AD \sin 30°}{\cos 60°} = 2.$$

但是，MK 是平行四边形 $AMNB$ 的高，因此所求的面积

$$S = AB \cdot MK = 4.$$

在这个推理中，有本质性的缺陷：问题所根据的图，是由于不确切的假定平面 α 切割矩形 DCC_1D_1 实现的。然而在所给的条件中，已知的数据完全是不明显的，而且是错误的。实际上平面 α 过上面的侧面，而点 M 落在棱 DD_1 的延线上。事实上，如同上面获得的，$MK = 2$（注意，这个计算不依赖于在线段 DD_1 上的点 M 的位置），由 $\triangle MDK$ 我们得到，$MD = \sqrt{3}$。由于 MD 长度大于 D_1D，因此，在问题中所提到的是图 7 的构形，应当寻求平行四边形 $AQPB$ 的面积，而不是 $AMNB$ 的面积。进一步地解决问题不再导致原则上的困难，在此要提醒读者，所求的面积 $S = \frac{4}{\sqrt{3}}$。

在解题中，当所给的几何构形不是通过数值，而是通过

文字，即在具有参数的几何问题本身的类型中给出，应给予更多的注意．在这些问题中(如同在具有参数的代数问题一样)，解题方法与获得的解答，主要依靠确定构形的参数给出．

例如，以上选择的例题中，截面对底面的倾角为φ，而其余所有数值上的条件都是一样的，此时在解题对要考虑三种情形：

1．点M位于棱DD_1上；

2．点M与点D_1重合；

3．点M在棱DD_1的延长线上．

将线段MD及D_1D进行比较，无论哪个指出的条件成立，依靠角φ的数量来确定它们都是可能的．显然$MD=KD\,\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}\,\varphi$与点$M$在直线$DD_1$上的位置无关．因此所指出的情形由以下条件确定：

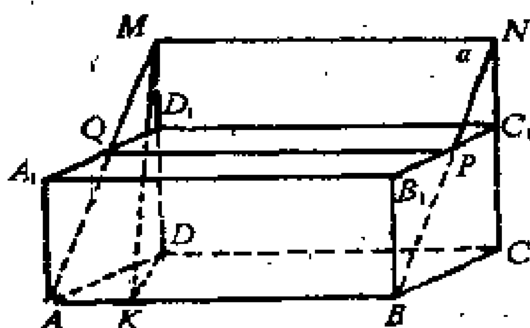


图 7

(i) $\mathrm{tg}\,\varphi<1$；

(ii) $\mathrm{tg}\,\varphi=1$；

(iii) $\mathrm{tg}\,\varphi>1$．

因此，如果$\varphi<45°$，则有第一种情形成立(图6)，此时$S=\dfrac{2}{\cos\varphi}$．如果$\varphi>45°$，则有第三种情形(图7)成立，此时$S=\dfrac{2}{\sin\varphi}$．至于$\varphi=45°$的情形，应该当作特殊

的图来对待，但是事实上能够利用任意的现有条件——在考虑“极”值时，常常达到令人满意的程度．在这种情形 $S=2\sqrt{2}$．

最后的答案可表为以下形式：

$$S=\begin{cases}\dfrac{2}{\cos\varphi}, & 如\ \varphi<45^\circ,\\ 2\sqrt{2}, & 如\ \varphi=45^\circ,\\ \dfrac{2}{\sin\varphi}, & 如\ \varphi>45^\circ.\end{cases}$$

当然，第二种情形也可以由其他两种情形包括进去，并且把答案写得更为紧凑．

在以下问题中，我们遇到类似的情形．的确，各种构形的最后答案不依赖于所有参数的同一值，当然对于不同的构形，其中的计算可以按不同的方式去做．自然，其中所考虑的不是几何上所有的不同情形的解，尽管形式上得到正确的答案，但它不能够认为是有价值的．

问题 5 半径为 r 的球与平面 P 相切于点 A．直线 l 与平面 P 构成角 φ，它与这个平面相交于点 C 并与球面相切于点 B．如果 $AC=2r$，试求线段 AB 的长．

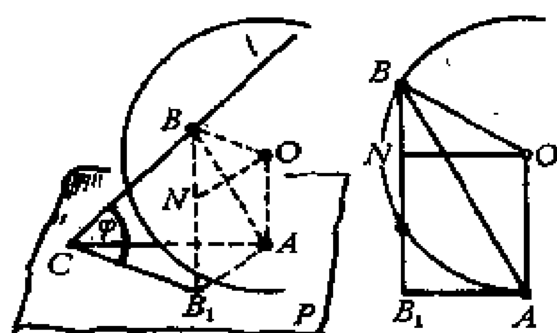


图 8

按问题的条件，我们描绘外形(图8)．由点 B 引平面 P 的垂线 BB_1，并且连接线段 CB_1．显然，$\angle BCB_1=\varphi$，其次，由球外一点引球面切线的性质，$OA=OB=r$，

$CB=CA=2r$.

所求的线段AB是直角$\triangle BB_1A$的斜边，而BB_1是直角$\triangle CB_1B$的直角边$BB_1=2r\sin\varphi$. 剩下的就是要找直角边AB_1. 直线OA与BB_1都垂直于平面P，它们在一个平面上. 在平面上，我们作直线$ON\parallel AB_1$；此时，$AONB_1$是矩形，因此，$AB_1=ON$，$NB_1=OA=r$. 因为

$$NB=BB_1-NB_1=2r\sin\varphi=r,$$

则由$\triangle ONB$

$$ON^2=OB^2-NB^2=4r^2\sin\varphi(1-\sin\varphi),$$

而由$\triangle BB_1A$

$$AB=\sqrt{AB_1^2+BB_1^2}=\sqrt{ON^2+BB_1^2}=2r\sqrt{\sin\varphi}.$$

但是，不能认为已得到问题的结论. 事实上，我们在对线段NB进行计算时，我们实质上利用了点B，N与B_1位于如图8所描述的事实. 但是由问题的条件，并不能得出点B位于两点N与B_1之间的结论. 只有考虑所有这些情形，我们就能够确信，我们已经对问题的解法进行了详尽的讨论.

如果点B位于N与B_1两点之间(图9)，则

$$NB=NB_1-BB_1=r-2r\sin\varphi,$$

对线段ON与AB进一步计算，就恰巧得到和以前一样的结

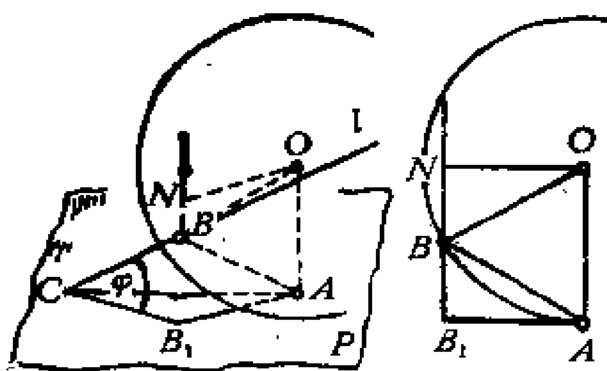


图 9

果，由此我们得到关于线段 AB 的那个公式．如果最后 N 与 B 两点重合，则 $BB_1=ON=r$，且 $AB=r\sqrt{2}$．在这种情形，在直角 $\triangle CB_1B$ 中切线 $BB_1=r$，由斜边 $CB=2r$ 的一半组成．因此 $\varphi=30°$，即 $AB=2r\sqrt{\sin\varphi}$．

可见，等式 $AB=2r\sqrt{\sin\varphi}$ 对于角 φ 的任意可能的值都成立．解决这个问题可以不依靠点 B，B_1 与 N 的论证来进行，读者不妨试着独立完成．

从我们所研究的问题表明，认真完成构图具有非常实际的意义．作出正确的图能够使解法简化，而作出不正确的图就得出不正确的结论．最后要注意，对纯粹技术性的方面给予注意是必要的．图应当简单明瞭，应当尽可能认真地绘制（在誊清过程及演草中），虽然不能得出极端的结论：几何问题不是关于画图的问题，它不需要具有毫米的精度．习惯上，应当不用绘图仪器，徒手画图并尽可能精确（可能只有圆规除外），对于个别图的相互位置我们要予以注意．当然，在准备考试过程中，徒手绘图早就在考生中形成了．

练 习 题

1．已知在平面上有四个不同的点 A，B，C，D，且 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$．试证 $AD\perp BC$．

2．三棱锥有两个面是边长为 a 的等边三角形，而另外的两个面是等腰直角三角形．试求棱锥的内切球半径．

3．棱锥的底面是矩形，它的对角线交角为 α，且所有的侧棱与底面组成同一个角 φ．已知棱锥的外接球的半径为 R，试求棱锥外接球球心到棱锥底面的距离，以及棱锥的体积．

4．已知平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，

且角 ABC 为钝角．过点 B，D 各引两条直线，其中有一条垂直于边 AB，而另一条垂直于边 BC．这四条直线相交形成一个与平行四边形 $ABCD$ 相似的平行四边形．试求平行四边形 $ABCD$ 的面积．

5．立方体有两个底面 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$，其中 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$．已知立方体的棱长为 $\frac{3}{2}$，在立方体的角 A 内，有一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的内切球．试求立方体中与角 C 且与已知球相切的球的半径．

6．棱锥 $SABC$ 的底面是 $\triangle ABC$，它的边 AB，AC 相等，且交角为 α，棱锥的高与棱 SA 重合，其长为 h．另有一个三棱锥，它与前一个棱锥有同一个点顶点 S，它的底面也是一个三角形，三个顶点位于 $\triangle ABC$ 的不同的边上，如果第二个棱锥的侧面面积相等，且侧棱也相等，试求它的体积．

7．等腰三角形的底边长为 a，且内角为 α，有一外接圆．作一个圆，它与等腰三角形的外接圆和底边都相切，与底边的切点是底边的中点．试确定这个圆的半径，如果解不是唯一的，考虑它所有的可能性．

8．在 $\triangle ABC$ 中，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$，$\angle A=120^\circ$．在边 CA 的延长线上取点 M 使得 BM 是 $\triangle ABC$ 的高．试求过 A，M 两点，并与过 B，M，C 三个点的圆在点 M 相切的圆的半径．

9．在平行四边形内有两个圆彼此相切，而且其中每个圆又与平行四边形的三条边相切．已知一个圆的半径等于 1，由平行四边形的某一顶点到切点的线段距离为 $\sqrt{3}$．试

求平行四边形的面积.

10. 两个相等的菱形 $ABCD(AB \parallel CD, AD \parallel BC)$ 及 $APQR(AP \parallel QR, AR \parallel PQ)$ 具有共同的顶点 A，它们位于同一个平面上. 已知 $\angle BAD = \angle PAR = \alpha$，其中 $\alpha < \pi/2$，且 $\angle QAC = \beta$. 延长边 BC 及 QR 交于点 K，菱形将位于直线 AK 和直线 AD 相关的半平面的不同位置上. 试求 $\angle KAD$ 的值.

译自《量子》1976 年第 6 期

七、在立体几何问题中的图

N·沙雷金

检查高等学校学生的书面作业时，经常发现下列情形：在几何习题的誊清本上都有着“好的图”，但是在草稿中所画的图，使人感到仅仅是一种“假设”．不能不感到惊奇的是，学生竟能借助这样的图解题．其实也没有什么秘密可言，好的图对解几何题有实质性的帮助，特别对解立体几何题．当然，对普通学生来说，未必都能像《量子》的作图者一样去作插图．然而，如果解每个几何题时注意作图的质量，那么，到最后你就能学会作很不错的图．但还要提醒注意，当你还没有作好图时，暂时不要急于解题，也不要吝惜作图的纸张、作图应用粗实线，看不见的线用虚线．先不引辅助线，暂时不相信它在图中的必要性．立体几何问题常常归结为一个或几个平面几何问题，对每个这样的问题，都要作分图．许多球，作为法则将得不到表观，但必须指出它们的中心，它同直线、平面或同另外的球的切点．两个球相切的事实意味着：假如外切，它们中心间的距离等于半径之和，如果内切，它们中心间的距离等于半径之差．

我们引入几个例子．

问题1 球O内放有四个半径为r的球．这些球中的每一个都与其它三个球及球O相切．确定球O的半径．

解 设四个半径为r的球的中心是A，B，C，D．而外面球的中心是O（图1）．由此，这些球成两两外切的形式，得出$ABCD$是棱长为$2r$的正四面体．所有这四个小球与

以O为中心的大球内切，所以距离AO，BO，CO，DO彼此相等且等于$R-r$，其中R是所求的球O半径．另一方面，所有这些距离都等于棱长为$2r$的正四面体的外接球的半径．现在已经容易求出未知的半径R了(请自己完成)．

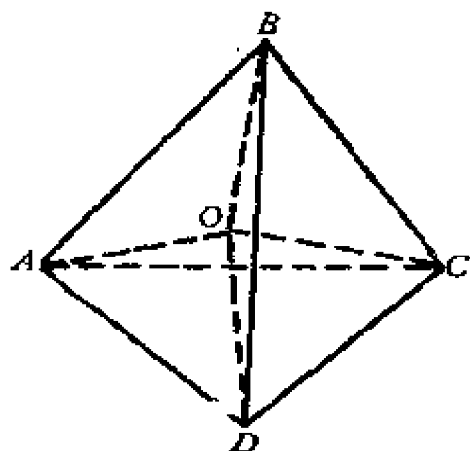


图 1

答：$R=r\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

问题 2　正四面体$ABCD$的棱长为a．以棱AB为直径作球．求在四面体内与A为顶点的三面角相切且与所作的球相切的球的半径．

解　设O是AB的中点，是已知球的中心，O_1是未知球的中心．容易想象，O_1位于四面体$ABCD$(图2)的高AM上．

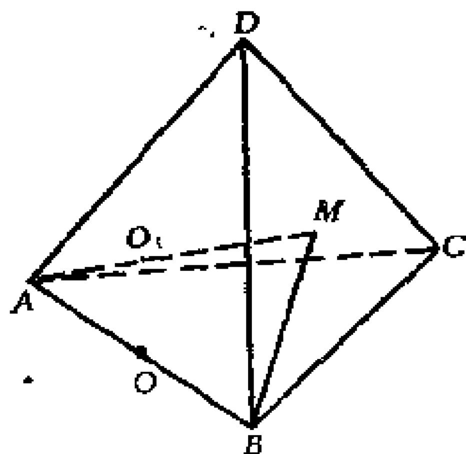


图 2

我们以x表示球O_1的半径，这个球切于三面角A中，就可以得出$AO_1=3x$．实际上，内切于三面角A的任意球，它的中心到顶点A的距离与半径之比是常量．我们考察正四面体$ABCD$中的内切球：它的中心与外接球的中心重合；容易计算，正四面体外接球与内切球半径之比等于3．

我们画$\triangle AMB$的分图($\angle M$是直角)，考察$\triangle AOO_1$，就有

$AO_1=3x$,

$AO=\frac{a}{2}$,

$O_1O=\frac{a}{2}\pm x$.

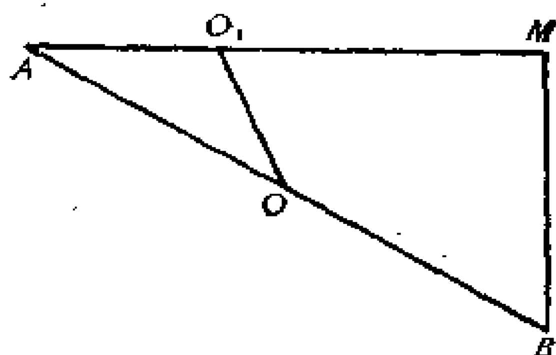


图 3

对于中心在点O与O_1两球外切的情况，应取"+"号．对于内切的情况则取"－"号(图3表示内切的情况，外切时切点O_1应在AM延长线上)．

从直角$\triangle AMB$求出$\angle O_1AO$，再对$\triangle OAO_1$用余弦定理，求x．

答：$\frac{a}{8}(\sqrt{6}\pm1)$．

问题3 三个一样的直圆锥，它们的底面半径为r且等于高的$\frac{3}{4}$，它们都在平面P的同一侧且底面都在平面P上．这些圆锥中，每两个的底面圆周都相切，求位于圆锥之间，与所有三个圆锥且与平面P都相切的球的半径．

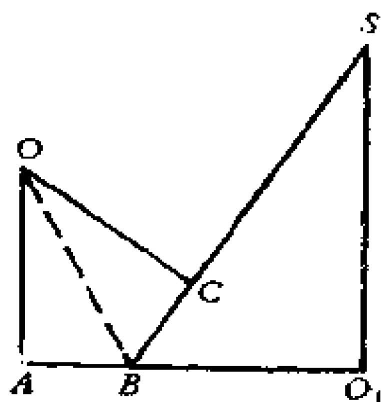


图 4

为了解这个问题，我们藉助于下面两个引理(独立证明它们)．

引理1 如果一个球外切于圆锥的表面与它的底所在平面，则圆锥的轴、圆锥与球的切点所在的母线、球心、球与

圆锥底面的切点，都在垂直于圆锥底面的平面上(图 4)．

在图 4 中 SO_1 是圆锥的轴，SB 是母线，O是球心，A是圆锥底所在平面与球的切点，C是球与圆锥的切点．

引理 2 球与平面P的切点，恰好是圆锥底面的圆心所成的正三角形中心．(球、圆锥和平面 P．如原问题所设)

现在图 4 就能解决问题，有

$$AO_1=\frac{2r\sqrt{3}}{3},\ BO_1=r,\ SO_1=\frac{4}{3}r.$$

由直角$\triangle AOB$ 容易求得未知半径 OA．在这个三角形中，已知直角边 AB，以及$\angle OBA=\frac{1}{2}\angle ABS$，而$\angle ABS$的所有三角函数都容易计算．

答：$2r\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$．

问题 4 在半径等于 2 的球面上有三个半径为1 的圆(圆心分别为 O_1，O_2，O_3)，它们中每一个都与另外两个相切．另有一个圆O_4半径小于已知圆，并与三个已知圆在球面上相切，求这个圆的半径．

我们在下面列举出解题中将要凭借的事实．请您独立证明它们：

(1)．如果两个圆放在球面上且彼此相切，则球心、这两个圆的中心和切点在同一平面上．

(2)．半径为 1 的已知圆中心 O_1，O_2，O_3形成正三角形．

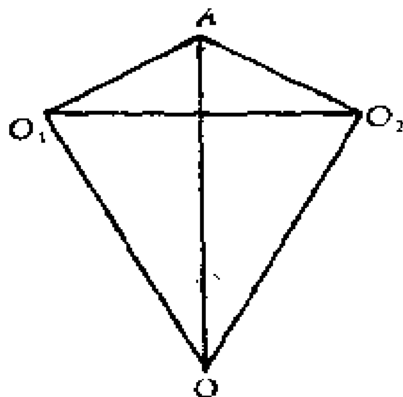
(3)．所求圆的中心在垂直于平面 $O_1O_2O_3$ 的球面半径上．

为了解题我们需要图 5 和 6 ．

在图 5 中，O是球心，O_1 和 O_2是两个半径为 1 的圆的

中心，A是它们的切点，$\angle AO_1O=\angle AO_2O=90°$，$OA=2$.

现在容易求得，$OO_1=OO_2=O_1O_3=\sqrt{3}$.



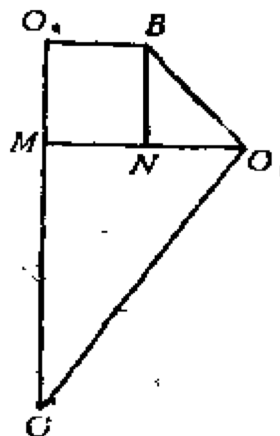


图 5　　　　图 6

在图 6 中，M是边长为$\sqrt{3}$的正$\triangle O_1O_2O_3$的中心，这意味着，$O_1M=1$，O_4是所求圆的中心．B是它与第一个圆相切的切点，$BN\perp MO_1$，线段NO_1容易由$\triangle O_1BN$与$\triangle OO_1M$相似求得．所求的半径

$$O_4B=MN=MO_1-NO_1$$

答．$1-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

有时考察不在问题条件中出现的某些几何体，例如棱锥、平行六面体、棱柱等是有好处的．

问题 5　三个相等的圆柱面两两相切并且它们的轴两两互相垂直．如果每个圆柱面的半径都等于r，求与这三个圆柱面都相切的最小球的半径．

解　我们考察棱长为$2r$的立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$.

可以认为，棱 AA_1 在一个圆柱的轴上，棱 DC 在另一个圆柱的轴上，棱 B_1C_1 在第三个圆柱的轴上（图 7）.

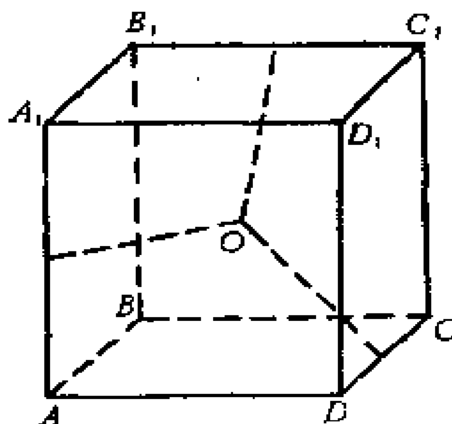


图 7

我们先证明，所求的球的中心与立方体的中心 O 重合.

实际上，我们考察通过点 O 与已知圆柱共心的三个圆柱. 则 O 是位于这所有三个圆柱表面上或内部的唯一的点. 这意味着，异于 O 的任意点，到三条直线 AA_1、DC 和 B_1C_1 之一的距离，比由 O 到这些直线的距离要大.

答： $r(\sqrt{2}-1)$.

问题 6 n 个相等的圆锥（$n\geqslant 3$）有公共的顶点，每一个都与其他两个相切，并且都切于一个平面. 求这些圆锥轴截面上顶点所在的角.

解 我们考察三棱锥 $SABC$（图 8），它的底面是 $\angle ACB=\dfrac{2\pi}{n}$ 的等腰 $\triangle ABC$，（$AC=CB$），SC 垂直于平面 ABC，C 在平面 SAB 上的射影与 $\triangle SAB$ 的内切圆中心重合. 现在考察顶点位于点 C 的圆锥，它的底面圆恰好是 $\triangle SAB$ 的内切圆. 容易确认：这样的圆锥将符合题设. 事实上，如果与棱锥 $SABC$ 相等的

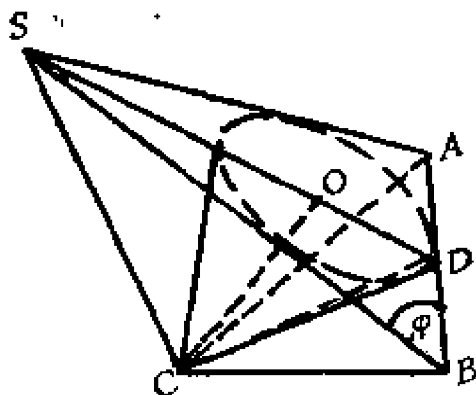


图 8

n 个棱锥彼此按次序安放，使得它们顶点重合于 S，则内切于这些棱锥的圆锥将形成满足问题条件的系统。

通过 l 表示圆锥的母线，通过 r 表示它的底圆的半径。由直角$\triangle SCD$ 和 COD 相似，求得 $SD=\frac{l^2}{r}$. 由 $\triangle CDB$，求得 $DB=l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. 另一方面，由$\triangle SDB$，有

$$SD=DB\cdot\operatorname{tg}\varphi=DB\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

其中 φ 是$\angle SBD$，也就是

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{OD}{DB}=\frac{r}{l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

所求角的一半的正弦值等于比$\frac{r}{l}$，这一比值容易从方程

$$\frac{l^2}{r}=l\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2\frac{r}{l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{1-\frac{r^2}{l^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$$

确定。

答：$2\arcsin\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

问题 7 光的射线以 α 角落在平面镜上. 镜子很麻利的绕射线在镜中的射影转 β 角, 求反射的射线成怎样的角.

解 设 A 是入射线上某一点, B 是射线在镜面上的落点, A_1 是 A 关于已知镜面的对称点,而 A_2 是 A 关于旋转后镜面的对称点. D 和 C 是 A 在这镜面上的两个射影(图 9), 于是 BA_1 和 BA_2 是反射线的延长线, 所求角等于 $\angle A_1BA_2$.

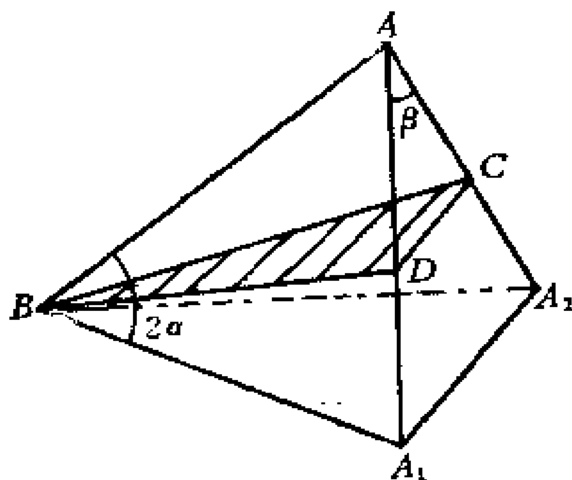


图 9

在四面体 AA_1A_2B(图 9)中, D 和 C 分别是棱 AA_1 和 AA_2 的中点. 平面 BDC (旋转后的镜面) 垂直于棱 AA_2, $AB=A_1B=A_2B$, $\angle ABA_1=2\alpha$, $\angle A_1AA_2=\beta$. 由此容易求出:

$$A_1A_2=2DC=2AD\sin\beta=2AB\sin\alpha\sin\beta.$$

现在由 $\triangle A_1BA_2$ 我们可求得需要的角.

答: $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

最后回到在本文引入的独特的问题, 再次细心地检查问题 1-7 的解. 首先看到, 所有这些问题必定用非常复杂的图形, 然而我们能用简单的, 在某种情况下甚至是纯平面几何的图来对待. 为了用简单图形来说明立体几何的问题通常是非常困难的, 必须具有很好的空间想象力, 要用实践并且只有实践才能达到这一点.

练 习 题

1．在圆锥中放五个相等的球，其中四个在圆锥的底面，并且这四个球中的每一个都与在底上的另两个球相切，也和圆锥侧面相切．第五个球与圆锥侧面及其余四个球相切．如果每个球的半径都是R，求圆锥的体积．

2．三个半径为r的球位于正三棱柱的下底面上，并且它们中每一个与其他两球以及棱锥的两个侧面相切．在这三个球上放第四个球，它切棱柱的所有侧面和上底面．确定棱柱的高．

3．在正四棱锥中侧高等于底边．棱锥内部放入两个球，一个半径为r的球，与所有侧面都相切，另一个半径为$2r$的球与底面和两个相邻的侧面相切，并且两个球互相外切，求这个棱锥的侧高．

4．两个相切的球，它们也与二面角2α的面相切．设A是一个球与二面角一个面的切点，B是另一个球与二面角的另一个面的切点．问线段AB被球面分成怎样的比？

5．已知正四棱锥$SABCD$(S是顶点)的底面边长为a，且侧棱长也是a，以O点为中心的球通过点A，并且切棱SB和SD于它们的中点，求棱锥$OSCD$的体积．

6．在平面P上，有一个边长为a的正三角形，它的中位线把它分为四个三角形，把其中的三个三角形作为底，作三个高为a的正三棱锥．(三个棱锥都在平面P的一侧)，在这三个棱锥之间有一个球，它与平面P相切，并且与三个棱锥都相切，求这个球的半径．

7．正三棱锥$SABC$的侧棱对底面的倾角为45°．一个球切底面ABC于点A，并与棱锥的内切球相切，通过这个

球的中心和底面的高线 BD 作平面。求这个平面对底面的倾角。

8．三个相等且两两相切的圆柱面，它们的轴互相垂直。已知圆柱面的半径都等于 r，求这三个圆柱面之间的最大的圆柱面的半径。

译自《量子》1974 年第 10 期

答案与提示

1．答：$\frac{1}{3}(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$.

提示：通过圆锥的高和在底面上一个球的中心，作圆锥的截面。

2．答：$\frac{1}{3}r(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}})$.

提示：用 r 表示出棱柱的底边长度，并且求第 4 个球的半径。顶点为四个球的中心的四面体的高线与第 4 个球的半径之和，就是棱柱的高。

3．答：$\frac{2}{5}r(8\sqrt{3}+\sqrt{37})$.

提示：画通过高和两个球中心的平面去截棱锥的截线。

4．答：$1:\mathrm{tg}^2\alpha:1$.

提示：设 A_1 和 B_1 是球与二面角的面的第二个切点，M 和 N 是由切点向棱引的垂足。棱柱 AA_1MBB_1N 所有元素都由条件确定。利用关于球的割线段乘积的定理，就可得到解答。

5．答：$\frac{5\sqrt{2}}{96}a^3$.

提示：证明点O在AC上。

6．答：$\frac{a}{6}$。

提示：我们考察通过球心与棱锥的一个顶点且垂直于已知三角形所在平面的截面。

7．答：$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}$。

提示：如果a是棱锥的底边，R是已知球的半径，φ是所求的角。则$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2R}{a}$。由于已知$a$，问题转化为确定$R$，为此需研究垂直于底面且通过已知的内切球的中心的平面去截棱锥。

8．答：$r(\sqrt{2}-1)$。

提示：利用问题5的图，解与问题5类似.

八、正棱锥中的基本角

И.克勃维奇

在正棱锥的问题中研究的角，最经常遇到的是下列四种：侧棱对棱锥底平面的倾角；侧面对底面的倾角；棱锥顶点的面角；棱锥侧棱处的二面角．我们约定，用字母α，β，γ和δ分别表示上述这些角的量值．所有这些角，它们都不在同一平面上，有时也叫做基本角．本文将说明，已知基本角中任何一个的量值，就能够确定所有其余基本角的量值．我们分别对正四棱锥、正三棱锥、正n棱锥的情况来作研究．

在正四棱锥$SABCD$中（图1）$\angle SCO=\angle SDO=\alpha$，$\angle CSD=\gamma$，$\angle SFO=\beta$．在面$SCD$中引$DE\perp SC$并且连结点$E$和底面顶点$B$．不难证明，$\triangle BEC$与$\triangle DEC$全等．由此得出，$BE=ED$且$\angle BEC=\angle DEC=\frac{\pi}{2}$．这样一来，$\angle BED$是以$SC$为棱的二面角的平面角，即$\angle BED=\delta$．线段$OE$是等腰$\triangle BED$的中线，因

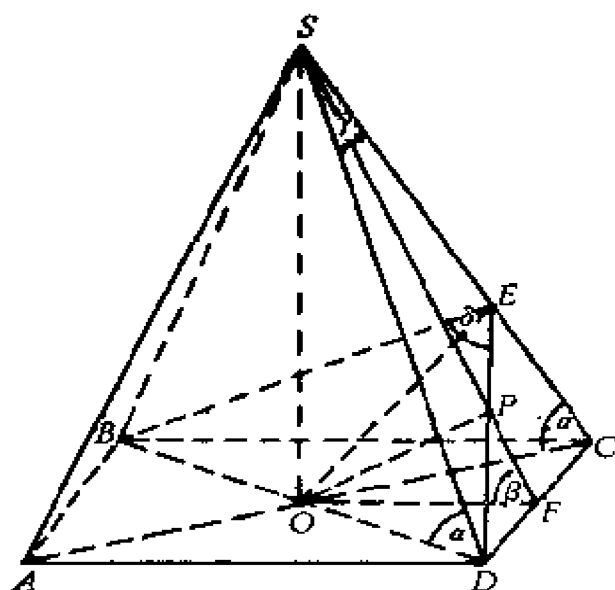


图 1

此也是这个三角形的角平分线和高线，从而，

$$\angle OED=\frac{\delta}{2}.$$

线段 OP 属于平面角 $\angle BED$ 和 $\angle SFO$ 所在平面的交线。二面角的平面角所在的平面，垂直于二面角界面，因此平面 BED 和 SFO 都垂直于平面 SCD。因为垂直于第三个平面的两个平面的交线也垂直于第三个平面(请独立证明)。所以 $OP\perp(SCD)$。从而，$\triangle OPF$ 和 $\triangle OPD$ 都是直角三角形，且 $\angle DOP=\frac{\delta}{2}$。

现在，我们转向公式的推导。

我们将利用下面一般的方法，通过 x 表示正棱锥的线段的长。这条线段或者包含在含有已知角的三角形中，或者包含在含有所求角的三角形中；进一步通过 x 表示在这个包含未知角的三角形中另两条边之一为已知角的函数。然后，我们求未知角的函数。

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta \qquad (1)$$

证明 设 $SO=x$，由 $\triangle SOF$，我们有

$$OF=x\operatorname{ctg}\beta;$$

由 $\triangle OFD$，我们有 $OD=x\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta.$；由 $\triangle SOD$ 有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{x\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta.$$

$$\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

证明 设 $SD=x$，由 $\triangle SDF$ 有 $DF=x\sin\frac{\gamma}{2}$。

由$\triangle OFD$有$OD=x\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$；由$\triangle SOD$有

$$\cos\alpha=\frac{x\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{x}=\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \tag{3}$$

证明 设$OE=x$，由$\triangle OED$有$OD=x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$，因为$OC=OD=x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$；由$\triangle EOC$有

$$\sin\alpha=\frac{x}{x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}.$$

我们建议读者推导下面三个公式：

$$\cos\beta=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \tag{4}$$

$$\sin\beta=\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}. \tag{5}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

对于正三棱锥，我们写出类似的公式，而略去它们的证明：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta. \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \tag{9}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \tag{10}$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}. \tag{11}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

正 n 棱锥的公式也是经常需要的，我们仍引入它们但略去证明：

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}. \tag{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \tag{14}$$

$$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \tag{15}$$

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \tag{16}$$

$$\sin\beta = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \tag{17}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (18)$$

不难看出公式(1)—(12)可以自公式(13)—(18)得出，如果在后面一组公式中分别以 4 和 3 代替 n 的话。

我们说明，怎样利用所得到的这些公式去解题。

问题 1 确定正四棱锥的体积，已知它的高等于 H，以侧棱为棱的二面角是以底面的边为棱的二面角的三倍。

解 根据条件 $SO=H$。(见图1)

由$\triangle SFO$，我们得到 $OF=H\operatorname{ctg}\beta$。因此，

$$AD=2H\operatorname{ctg}\beta.$$

我们求棱锥的体积：

$$V=\frac{1}{2}(2H\operatorname{ctg}\beta)^2H=\frac{4}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta.$$

在公式(5)中用角 3β 代替角 δ，得到方程

$$\sin\beta=\sqrt{2}\cos\frac{3\beta}{2}\Longleftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(4\cos^3\frac{\beta}{2}-3\cos\frac{\beta}{2}\right)\Longleftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=4\sqrt{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-3\sqrt{2}\Longleftrightarrow 4\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$+\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}-1=0,$$

由此，$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$(负根不适用)。由于 $\operatorname{ctg}\beta=\frac{3}{\sqrt{7}}$，

最后，

$$V=\frac{4}{3}H^3\cdot\frac{9}{7}=\frac{12}{7}H^3.$$

问题 2 在正六棱锥中顶点处的面角等于侧棱对底面之间的角，求这个角。

解 设在公式(14)中，$n=6$ 和 $\gamma=\alpha$，我们得到三角方程，由它求所求的角：

$$\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\Longleftrightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}-1=0;$$

得 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$(负根，当然是不相干的)，

因此， $\alpha=2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

问题 3 在正三棱锥中底面内切圆半径等于 r。而侧面所在平面之间的角等于 φ。确定一个正方体的棱长，使它的体积等于已知棱锥体积的 $\sqrt{3}$ 倍。

解 若 a 是底边，则 $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$，即 $a=2r\sqrt{3}$。则棱锥底面积

$$S_{底}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}.$$

正三角形外接圆的半径是这个三角形内切圆半径的二倍，即 $OB=2r$。由 $\triangle SBO$ 我们得到 $SO=2r\operatorname{tg}\alpha$(图 2)。

棱锥体积 $V=\frac{1}{3}\cdot 3r^2\sqrt{3}\cdot 2r\operatorname{tg}\alpha=2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

用 x 表示所求立方体棱之长，列出方程

$$x^3=\sqrt{3}\cdot 2r^3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

由此

$$x=r\sqrt[3]{6\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,.$$

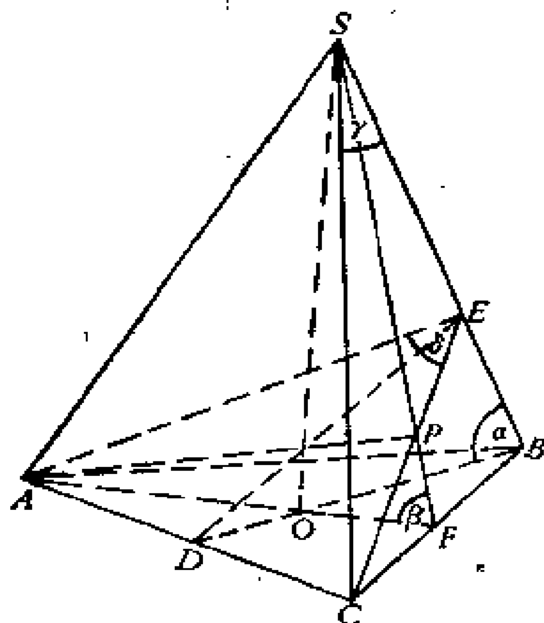


图 2

现在借助公式(9)，通过角 φ 的函数表示 $\mathrm{tg}\,\alpha$：

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2},$$

则

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}}.$$

因此

$$x=r\sqrt[3]{6\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}},$$

$$=r\cdot\frac{\sqrt{3\cos\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt[6]{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}.$$

练 习 题

1. 正四棱锥的底面边长等于 a，相邻侧面之间的角等于 α。求棱锥侧表面的面积。

$$\left(答：\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}\right)$$

2. 求底面边长为 a，顶点处的面角等于侧棱对底面倾角的正三棱锥的体积。

$$\left(答：\frac{a^3}{24}\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)$$

3. 求内接于球面的正六棱锥的相邻侧面之间二面角的量值。已知这个量值等于由球的中心对棱锥侧棱的视角的量值。

（答：$\pi-\arccos(\sqrt{21}/4)$）

4. 在正四棱锥 $SABCD$ 中，由顶点 A 引向侧面 SBC 和 SCD 的垂线 AL 和 AM 之间的夹角等于 α。如果棱长等于棱锥底面边长的立方体的体积等于 v。求棱锥的体积。

$$\left(答: \frac{v\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{\cos\alpha}}\right)$$

5. 求正四棱锥的体积。如果它的侧棱等于 l 而侧面对底面的倾角等于 α。

$$\left(答: \frac{4l^3\operatorname{tg}\alpha}{3(2+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}\right)$$

6. 在正四棱锥中内接圆锥的体积等于 Q。相邻侧面之间的二面角等于 α。求棱锥底面的边长。

$$\left(答: \sqrt[3]{\frac{12Q}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{-2\cos\alpha}}\right)$$

7. 正三棱锥底面边长等于 a，侧面之间的二面角等于 α。计算这个棱锥的体积和侧表面积。

$$\left(答: \frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{24\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}},\right.$$

$$\left.\frac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}\right)$$

8. 正四棱锥全表面积等于 S，在侧面上的顶点处的面角等于 α。求棱锥的高。

$$\left(答: \sqrt{\frac{S\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

9. 在正四棱锥中相邻侧面的二面角与相对侧面的二面角的量数之和等于180°。求这两类二面角的量数。

（答：$2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$，$\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2}$）

10. 在正n棱锥中底面边长等于a，在侧棱处（以侧棱为棱）的二面角等于α，求棱锥的体积。

$$\left(\text{答：}\frac{na^3\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt[3]{-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}}\right)$$

译自《量子》1986年第1期。

九、四面体的添加

И·沙雷金

在解决几何问题时，能够利用一种漂亮的方法，把所研究的几何图形，用另一种图形代替，从某种意义上说，这种图形将更为有利．比如说，在问题的条件中出现的三角形，如果引它的中线，常把它延长到和中线相等的距离，把这个三角形添加成为平行四边形会有好处的。在本文中，研究有关三棱锥——四面体的某些问题，如果把四面体添加为另外的多面体(通常是平行六面体)，有些问题就可能获得解决。

把棱锥添加为平行六面体的第一种方法，如图1所示．此处 AA_1BD 是所给的棱锥，而平行六面体的界面 DCC_1D_1，CBB_1C_1，$A_1B_1C_1D_1$ 过棱锥的顶点D，B，A，且与这个顶点所对的侧面平行。

问题 1 已知三棱锥 AA_1BD，其中棱 AA_1，AB 与 AD 互相垂直，而它们的长度分别为 a，b，c。

(1) 证明三棱锥的顶点A，与界面 $\triangle ABD$ 的重心M，以及棱锥的外接球的球心共线。

(2) 试求棱锥外接球的半径。

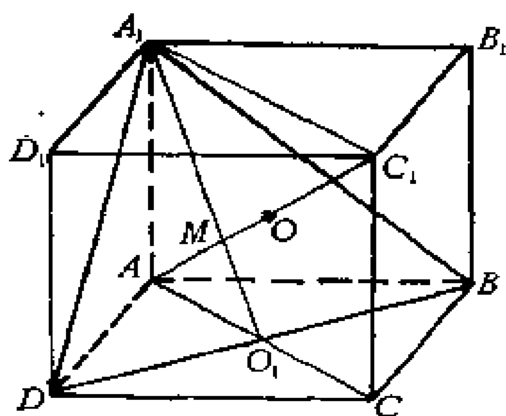


图 1

我们把棱锥 AA_1BD 添加为平行六面体(直平行六面体！)如图1所示。此时，棱

锥的外接球，也是平行六面体的外接球。球的半径等于平行六面体对角线的一半，即$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$，这就是问题（2）的解答。

为了证明问题（1）的论断，我们考虑矩形AA_1C_1C。球心位于对角线AC_1上，$\triangle A_1BD$的中线A_1O_1交对角线AC_1于点M，如果我们证明$\frac{|A_1M|}{|MO_1|}=2$，这将表明，M就是各中线的交点，从而证明了问题（1）的论断：由$\triangle A_1C_1M$与$\triangle AO_1M$相似，得

$$\frac{|A_1M|}{|MO_1|}=\frac{|A_1C_1|}{|AO_1|}=2,$$

这就是所要的证明。

经常遇到的将四面体添加为平行六面体的其他方法如下：过棱锥的每个棱作平面，与对棱平行。这些平面就限定了某个平行六面体（图2），它的界面的对角线是原四面体的棱。

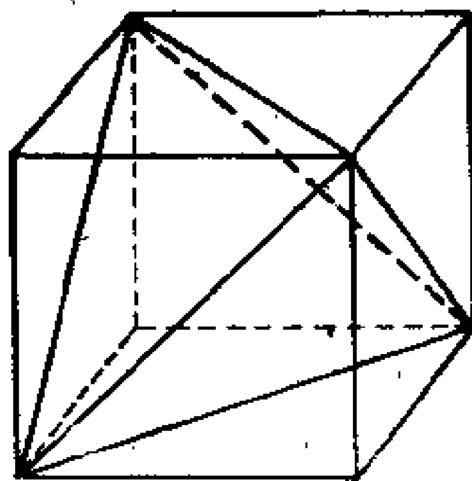


图 2

一个实用的小小建议：从描绘平行六面体开始作图将较为便利。

问题 2 正四面体的棱长为a，试求与所有棱都相切的球的半径。

容易由图2得知，用作图的方法构造成的平行六面体，它是边长为$a/\sqrt{2}$的立方体。这个立方体的内切球半径即为所求。

答案：$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

当给出四面体一个顶点的面角时（特别当它们全是直角），第一种方法将方便些。第二种方法用于有异面棱的四面体问题。

问题 3 四面体两条异面棱长为 a，另两条异面棱长为 b，还有两条棱长为 c，有一个球与四面体的一个界面和其它界面的延伸平面相切，试求这个球的球心与四面体内切球球心间的距离。

如图 3，$ABCD$ 是已知的四面体，而所作的平行六面体，是过四面体的棱且为平行于对棱的平面所限定。因为每个界面的对角线分别等于四面体的对棱，据条件它们是相等的，所以平行六面体的所有界面都是矩形，从而这平行六面体就是直平行六面体。

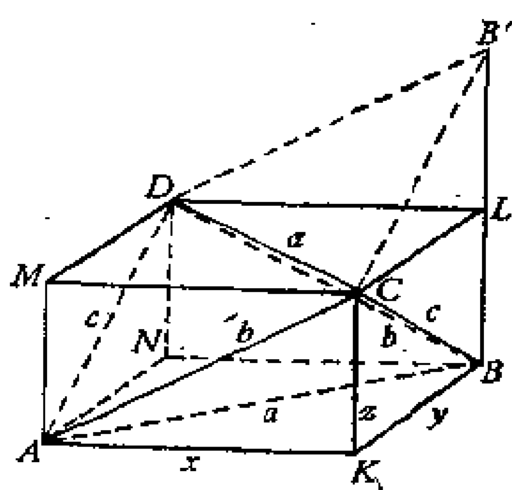


图 3

四面体 $ABCD$ 的内切球的中心与平行六面体各对角线的交点重合（试加以证明），切于四面体的界面 DCB（以后会知道，答案不依赖于面的选择）和其他界面延伸平面的球的中心，与平行六面体的顶点 L 重合。

事实上，L 与 DCB、ACB 这两平面等距离。为了证明这一结论，考虑棱锥 $B'LCD$，就有 $|B'L|=|LB|$，即它与棱锥 $BLCD$ 相等，从而点 A，D，B'，C 在一个平面上。

类似地可证明，点 L 与平面 DCB，ACB，ADB 都等距离。

这就是说，问题中所求的距离，等于平行六面体对角线长度的一半。以 x，y，z 表示平行六面体的棱长，由勾股定理得到三个方程组。

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=c^2 \end{cases}.$$

把它们相加，即得

$$\frac{|AL|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

问题 4 四面体为平面所截，截面与两个异面的棱平行而且和它们等距，截面面积为 S．四面体异面棱的距离为 h．试求四面体的体积。

设 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 为过四面体的棱，而且为对棱平行的平面所限定的平行六面体（图 4）。此时四面体 A_1BC_1D 的体积 V_T 等于平行六面体体积 V 减去四个三棱锥的体积（其中的一个三棱锥为 A_1ABD），它的体积等于平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$

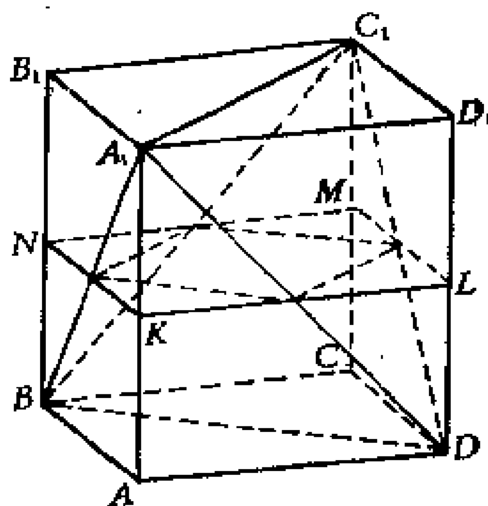


图 4

(为什么 ?)。

即 $$V_T = \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}Sh.$$

设条件中提到的异面棱为 A_1C_1, BD, $KLMN$ 是平行六面体的过 AA_1, BB_1, CC_1 与 DD_1 各棱中点的截面. 此时条件中谈到的截面的顶点，就是平行四边形 $KLMN$ 各边的中点. 因此，平行四边形 $KLMN$ 的面积等于 $2S$ 并等于平行六面体的底 $ABCD$ 的面积。现在得到平行六面体与四面体的体积：

$$V_T = \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}Sh.$$

已知一个多面体，它的所有的顶点落在彼此距离为 h 的两个平行的平面上。命 S_1 为位于一个平面上界面面积，S_2 为展布在第二个平面上的界面的面积，又 $S_{c.p}$ 为与给定平面距离为 $\frac{h}{2}$ 的多面体截面面积。对于多面体体积，以下公式是正确的：

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_{c.p}).$$

为了证明，我们要检验这个公式的正确性。如果多面体是任意四面体，将这个四面体分割，它的顶点位于两个平行的平面上以及顶点位于这些平面的四面体上：四面体展布在第一个平面面积的和为 S_1，又展布在第二个平面面积的和为 S_2，而四面体的平均截面面积的和等于多面体的平均截面面积 $S_{c.p}$。

作为结束，我们引入例题，将四面体添加为平行六面体，而不是把它添加为三棱柱，这样就会更便利。

问题 5 四面体两个界面的面积分别为S_1，S_2，它们之间的二面角为α，另两个界面面积为Q_1，Q_2，它们之间的角为β，试证

$$S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\alpha=Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\beta.$$

首先证明，如果三棱柱的一个侧面面积等于S，另两个侧面具有面积S_1，S_2，而它们之间的二面角为α，则

$$S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\alpha=S^2.$$

事实上，让平面ABC（图 5）与棱柱的侧棱垂直，$\angle BAC=\alpha$。对于$\triangle ABC$，由余弦公式写出，

$$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2-2|AB|\cdot|AC|\cos\alpha.$$

其次，就是把最后的等式乘以l^2，此处l是棱柱侧棱的长。

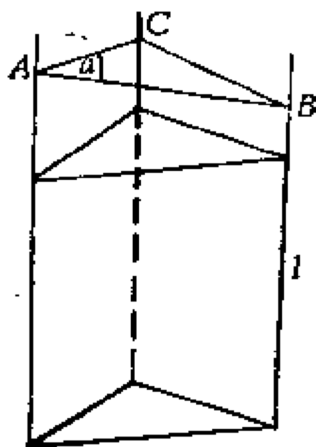


图 5

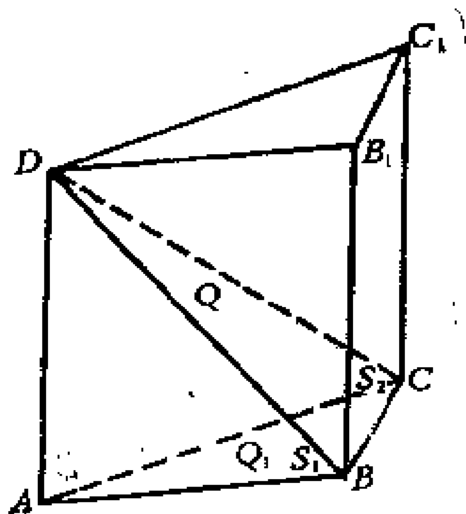


图 6

再转向解问题 5（如图 6）。命$ABCD$为已知的四面体，$S_{\triangle ABD}=S_1$，$S_{\triangle ADC}=S_2$，$S_{\triangle ABC}=Q_1$，$S_{\triangle DBC}=Q_2$。在棱

AD 张成的两面角为 α，在棱 BC 张成两面角为 β。考虑 $\triangle ABC$ 为底的三棱柱，它的一个侧棱为 AD。命 S 为平行四边形 BB_1C_1C 的面积，此时由刚证明过的公式得

$$4S_1^2+4S_2^2-8S_1S_2\cos\alpha=S^2.$$

面积 S 很容易通过两棱 BC，AD 的长度以及它们的夹角 φ 表达：

$$S=|AD|\cdot|BC|\cdot\sin\varphi.$$

如果我们考虑以 $\triangle ACD$ 为底，侧棱为 BC 的三棱柱，则得

$$4Q_1^2+4Q_2^2-8Q_1Q_2\cos\beta=S^2,$$

由此得到问题 5 的论断。

练 习 题

1. 证明四面体棱长的平方和等于它的异面棱中点之间距离的平方和的四倍。

2. 已知四面体 $ABCD$，证明它的棱 AD，BC 互相垂直，当且仅当满足等式

$$|AB|^2+|DC|^2=|AC|^2+|DB|^2.$$

3. 已知四面体两个对棱长度为 a，另外两个对棱长为 b，其余两个对棱长为 c。试求

（1）这个四面体的体积；

（2）它的外接球的半径。

4. 四面体两个对棱之长为 a，a_1，它们夹角为 α，另两个对棱长分别为 b，b_1，它们的夹角为 β，其余的两个棱长为 c，c_1，夹角为 γ（α，β，$\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$）。

（1）证明数$aa_1\cos\alpha$，$bb_1\cos\beta$，$cc_1\cos\gamma$其中的一个等于另两个数的平方和。

（2）已知棱长a，a_1，b,b_1，c，c_1，试求角α，β与γ。

译自《量子》1976年第1期

十、多面体的切棱球

M·克莱则曼

设一个球切某个多面体的所有的棱，则下列论断是正确的(请自行证明)：

（1） 多边体的每个面与球相交成一个与棱相切的圆，也就是每个面上的内切圆，因此，多面体的每个面都是这样的多边形，在这个多边形内有一个内切圆。

（2） 由球心向多面体任何一个面引垂线，其垂足是这个面内切圆的中心。

（3） 过各界面内切圆中心作界面的垂线，将相交于一点。它到所有棱的距离相等，这一点是多面体切棱球的中心。

（4） 由球心向多面体各棱引的垂线段，都等于球的半径。

现在我们研究某些类型存在切棱球的多面体。

棱柱的切棱球

定理 1 存在与棱柱的所有棱相切的球，当且仅当这个棱柱是正棱柱，并且它的所有棱彼此相等。

证明 设所求的球存在。我们首先证明，这个棱柱是直棱柱。通过球的中心 K 作棱柱的高 OO_1：$KO\perp$平面 ABC，$KO_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$(图 1)。根据性质(2)，点 O 和 O_1 是棱柱的相等的底面内切圆的中心。因此，作为等圆的半径 $O_1M_1=OM$($OM\perp AB$，$O_1M_1\perp A_1B_1$)。点 O，

O_1，M，M_1共面。(通过直线 OO_1 并且垂直于 AB，请证明!)。从而，OO_1M_1M 是矩形，且 M_1M 垂直平面 ABC ($M_1M /\!/ O_1O$)。进一步，$\triangle O_1M_1B_1=\triangle OMB$ (证明!) 因此 $M_1B_1=MB$，即 MM_1B_1B 是矩形，$B_1B /\!/ M_1M$，M_1M 垂直于平面ABC。这样一来，棱柱的侧面都是矩形。但根据性质(1)，这些面都有内切圆。而矩形有内切圆，则必是正方形，因此，棱柱的侧面都是正方形，从而，$AB=BB_1=BC=\cdots$，也就是棱柱的底面是等边的多边形，棱柱在平面 ABC 的投影为多边形 $ABC\cdots$，而球的投影是这个多边形的外接圆。若等边的多边形且内接于圆，则它是正多边形。因此，棱柱是正棱柱。

现在我们证明，各棱都相等的正棱柱存在着切棱球。为此必须证明，存在与这个棱柱所有棱等距的一点，这样的点是连接两底面中心的线段OO_1的中点 K(图 1)。

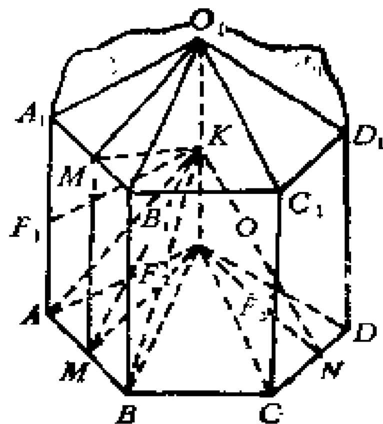


图 1

其实，我们发觉，线段 KM，KM_1，KN(等等)，作为这样的直角三角形的斜边是相等的，直角三角形的一条直角边等于 KO，另一条直角边是正多边形 $ABC\cdots$的边心距。由点K向棱柱的各侧棱引的垂线相等：$KF_1=OA$。在 $\triangle OAM$ 中，有 $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}OO_1=KO$，$OM$ 是边心距(类似地考察其余的侧棱)。

这样一来，定理已被证明，并且还证明了这个棱柱切棱球的半径等于棱柱底面外接圆的半径。以这个论断为基础，

可以解棱柱的切棱球的问题。

问题 1 在 n 棱柱中切有两个球，一个切棱柱的所有各面，而另一个切棱柱的所有各棱。这是一个怎样的棱柱？

根据定理 1，这个棱柱是正棱柱。一方面，因为在已知棱柱中有内切球，故 $MM_1=OM+O_1M_1$（图 2）；另一方面，因为存在与棱柱所有棱相切的球，所以 $MM_1=AB$。由此，$OM+O_1M_1=AB$，$2OM=AB$。但

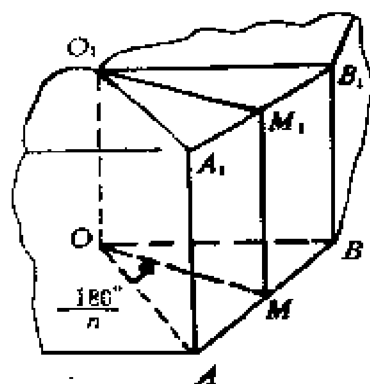


图 2

$$OM=\frac{AB}{2}\text{ctg}\frac{180°}{n},$$ 故

$\text{ctg}\frac{180°}{n}=1$，$n=4$。因此，棱柱是个立方体。

棱锥的切棱球

问题 2 一个球切四面体所有的棱。证明这个四面体对棱之和相等。

设一个球切四面体 $SABC$ 的棱（图 3）于点 M，N，K，F，P，E，由一点向已知球引的切线相等，所以

$SM=SN=SK$ （1）

$AM=AP=AF$ （2）

$BP=BK=BE$ （3）

$CN=CF=CE$ （4）

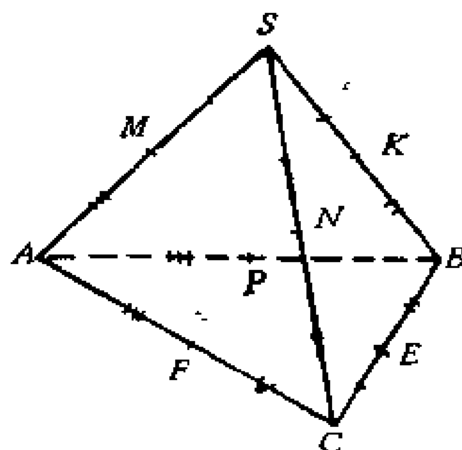


图 3

和式 $AS+BC$，$AC+BS$，$AB+CS$ 中的每一个恰好

包含（1）—（4）组中的一个线段，因此，这些和是相等的。

定理 2 如果与棱锥所有棱都相切的球的球心在它的高上，则这个棱锥是正棱锥。

设球的中心 K 位于高 SO 上（图 4），直角$\triangle SKF_1$，与$\triangle SKF_2$（依此类推）有公用的斜边 SK 和相等的直角边，即 $KF_1=KF_2$（球的半径），因此这两个三角形全等，即$\angle F_1SK=\angle F_2SK$。

直角$\triangle ASO$与$\triangle BSO$（依此类推）具有公用的直角边 SO 和以 S 为顶点且相等的锐角，所以这些三角形全等，并且 $OA=OB(=OC=\cdots)$。因此，O 是棱锥底面外接圆的中心。

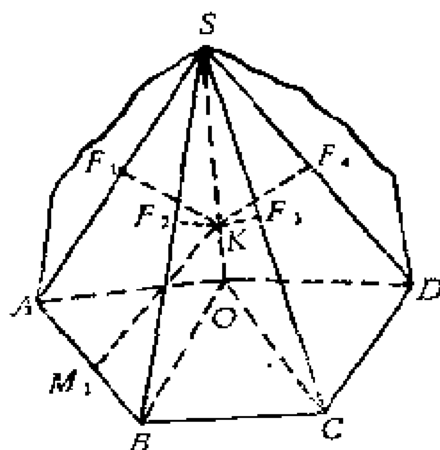


图 4

根据性质（2），O 点也是棱锥底面内切圆的中心。而当多边形的内切圆与外接圆共心时，则这个多边形是正多边形（证明!）。因此，原来的棱锥是正棱锥（定理获证）。

在解正棱锥的切棱球的问题时，利用直角$\triangle KSF_1$和$\triangle ASO$ 相似（$\angle ASK$ 公用，$\angle SKF_1=\angle SAO$）是有益的。

问题 3 正四棱锥的底边等于 a，以侧棱为棱的二面角等于 φ，确定与这个棱锥所有棱相切的球的半径。

容易证明，所求的球是存在的；通过 K 表示它的球心。设$\angle SDC=\angle SCD=x$（图 5）。我们引 $KF\perp SC$ 和 $KP\perp$平面 SCD。连结点 F 和 P。由三垂线定理得出，$FP\perp SC$。

又因棱锥是正的，$\angle KFP$ 等于在棱锥侧棱处的二面角的平面角的一半，即 $\frac{\varphi}{2}$。我们将发觉，KF 是棱锥切棱球的半径，而 P 是侧面 SDC 的内切圆的中心，因此 PD 是 $\angle SDC$ 的平分线，$\angle PDM=\frac{x}{2}$，$PM=PF$。由 $\triangle PDM$ 和 $\triangle KPF$ 求得：

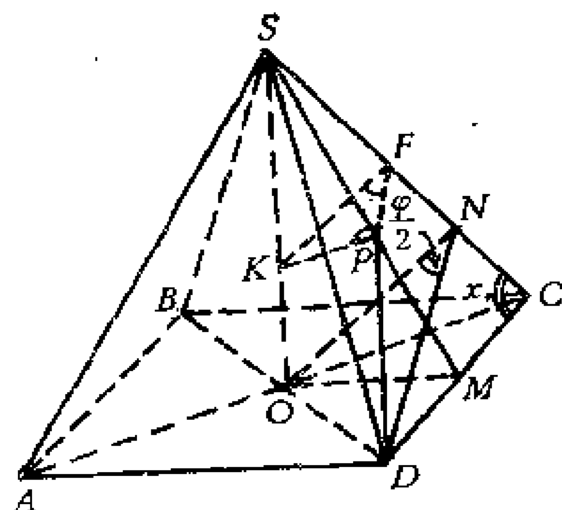


图 5

$$PM=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad KF=\frac{PF}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

现在我们寻找角 φ 和 x 之间的联系。为此，考察直角 $\triangle OND$ 和 $\triangle DNC$：

$$DN=\frac{OD}{\sin\frac{\varphi}{2}},\quad DN=DC\sin x.$$

由此，
$$OD=DC\sin x\sin\frac{\varphi}{2},\quad \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

现在求 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$（考虑到不等式 $0<x<\frac{\pi}{2}$），得到解答

$$KF=\frac{a}{\sqrt{2}\sin\varphi+2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}.$$

问题 4 求包含在两个球之间的棱长为 a 的正四面体的部分的体积：其中一个球切这四面体的所有的面，另一个球切这四面体的所有的棱.

我们通过 v 表示所求的体积. 则

$$v = v_1 - 4v_2 - v_3.$$

其中，v_1是半径为 R 与四面体所有棱相切的球的体积，v_2是由四面体的一个面截这个球所得球缺的体积. v_3是半径为 r 的四面体内切球的体积.

我们发现，如果一个球是立方体的内切球，则它切立方体面的对角线形成一个正四面体的所有的棱（图 6）. 如果立方体界面的对角线等于 a，则它一个棱等于$\frac{a}{\sqrt{2}}$，而立方体内切球的半径等于这个棱的一半，

$$R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

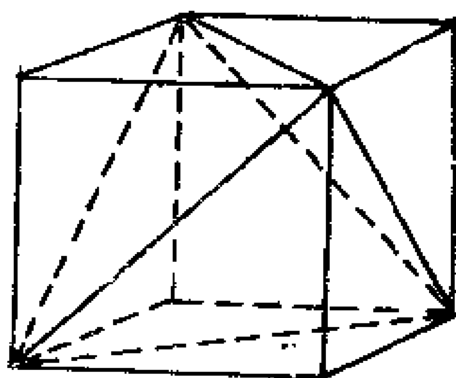


图 6

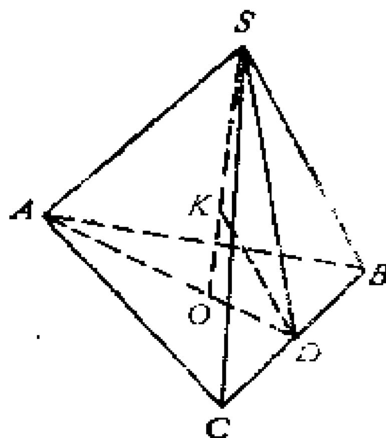


图 7

现在由$\triangle OKD$（图 7）我们求四面体的内切球的半径 r.

$$OK = r = \sqrt{KD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

球缺的高：$h = R - r = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12}$

$$= \frac{a(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{12}.$$

用所求的 R, r 和 h 的值代入表达式中，

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3,$$

化简后得到

$$v = \frac{1}{216}\pi a^3(7\sqrt{6} - 9\sqrt{2}).$$

正棱台的切棱球

如果一个球切正棱台的所有的棱，则作为由论断（1）—（4）得出，这个球的中心在连接底面中心 O, O_1 的棱锥的高上。球切锥的底面的棱于它们的中点 M, M_1, …（图 8），同时，OO_1M_1M 是梯形，$OO_1 \perp OM$，由球的中心 K 向侧面引垂线，侧高 MM_1 的中点与 P 重合．这个作图和定理 2（对棱台的应用）成为解棱台的切棱球的问题的依据。

问题 5 在正 n 棱台中有内切球。已知存在着切这个棱台所有棱的切棱球，求 n。

我们考察梯形 OO_1M_1M（图 8），以及 $\triangle MOB$ 和 $\triangle M_1O_1B_1$，我们有 $MM_1 = MO + M_1O_1$（作为棱台内切球的两条切线段）。$BB_1 = BM + B_1M_1$（作为对棱台切棱球的

两条切线段)，

$$MO = BM \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n},$$

$$M_1O_1 = B_1M_1 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

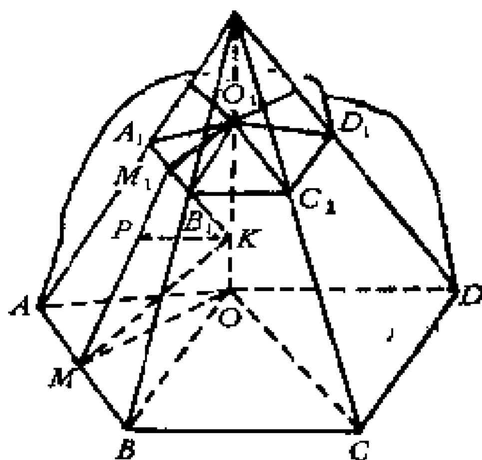


图 8

但 $MM_1 < BB_1$ (为什么？)，

故 $\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} < 1$，$\frac{180^\circ}{n} > \frac{180^\circ}{4}$，$n < 4$。因此 $n = 3$。

问题 6 如果正四棱台的底边分别等于 4 cm 和 2 cm。求与这个棱台所有棱都相切的球的中心到侧面的距离是多少？

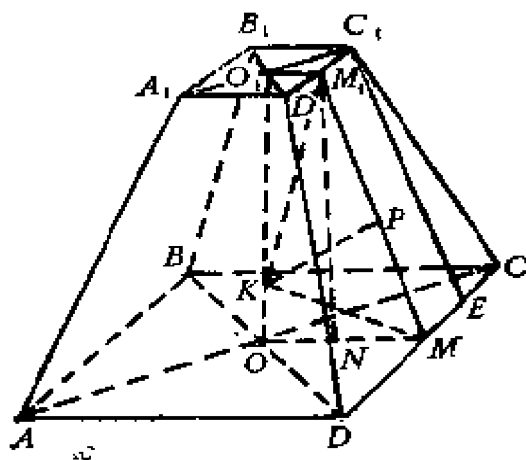


图 9

我们考察梯形 OO_1M_1M (图 9)，$OM = 2$ (cm)，$O_1M_1 = 1$(cm)，作为棱台切棱球的半径，$KM = KM_1$。正如在前个问题中那样，

$$CC_1 = CM + C_1M_1 = \frac{CD + C_1D_1}{2} = 3(\text{cm}).$$

现在我们求梯形 CC_1D_1D 的高：

$$M_1M = C_1E = \sqrt{CC_1^2 - (CM - C_1M_1)^2} = \sqrt{8}\ (\text{cm}).$$

梯形 OO_1M_1M 的高：

$$OO_1 = M_1N = \sqrt{M_1M^2 - (MO - M_1O_1)^2}$$

$$= \sqrt{7}\ (\text{cm})。$$

用 x 表示 OK 的长，则

$$O_1K = \sqrt{7} - x,\quad KM_1 = \sqrt{O_1K^2 + O_1M_1^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7} - x)^2 + 1^2}。$$

$KM = \sqrt{x^2 + 2^2}$。但 $KM_1 = KM$。得到关于 x 的方程，解得：$x = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$。

剩下求 $KM = \sqrt{\dfrac{4}{7} + 4} = \sqrt{\dfrac{32}{7}}$

和 $KP = \sqrt{KM^2 - PM^2} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}(\text{cm})$。

练　习　题

1. 一个球与立方体的所有的棱相切。如果立方体棱长等于 1 cm，求在立方体内部球面的面积.

2. 一个球切立方体所有棱。如果立方体棱长是 a，求立方体与球公共部分的体积。

3. 在正四棱锥中，侧棱同底面所形成的角等于 45°，与所有棱都相切的球的球心在何处？

4. 半径为 R 的球与正四面体的每条棱相切，求它们公共部分的体积。

5． 半径为 r 的球与三棱锥的所有棱相切，球心在棱锥内部。它在高线上距顶点 $r\sqrt{3}$ 处。证明这棱锥是正棱锥，并求棱锥的高。

6． 正三棱锥的底边等于 a，棱锥的侧棱等于 b。求与棱锥所有棱都相切的球的半径。

7． 正 n 棱锥的侧棱同底面成 α 角。如果棱锥底面边长等于 a，与棱锥所有棱都相切的球的球心到底面的距离是多少？

译自《量子》1974 年第 12 期

十一、多面体的截面

B.瓦维洛夫

本文选择了十个关于截面的问题．首要的目的是将多面体截面的作法系统化．这里选择有关的方法及习题，都以建立相交及平行投影为基础．有关垂直的方法，将另有专文介绍．

1．问题的提出

当证明定理及解立体几何问题时，我们利用图，对位于空间的平面图形进行描绘．

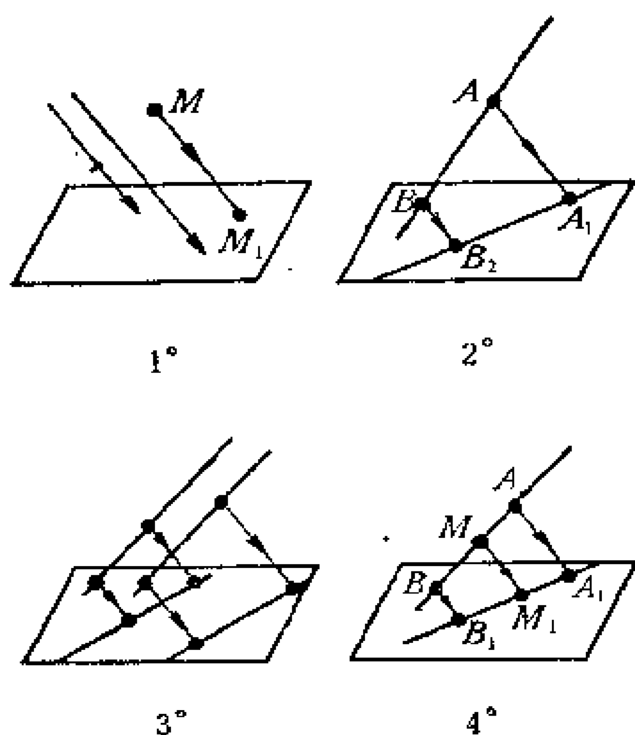


图 1

"在立体几何中，图形的映射（原象）是指任意图形，它与所给图形在某个平面上的平行投影相似"*.

因此，为了建立映射，应当考虑平行投影的性质，其中特别是：

1°，点映射为点；

2°，直线映射为

* 我们假定，投影方向不与平行四边形的平面平行．

直线；

3°，平行的直线映射为平行的直线；

4°，如果点M位于线段$\overline{AB}$上，则点M的映象在线段$\overline{AB}$的映象上，并将线段的映象分割所成的比与M分割线段$\overline{AB}$所成的比相同.

在性质2°—4°中假定，投影的方向不与投影直线及投影的线段方向相合.

我们发现，在平行投影下，一般不保持线段的长度及角度的值.

由这些性质得出，例如，平行四边形总是映射为平行四边形，而正方形（菱形，直角三角形）不一定映射为正方形（菱形，直角三角形）．其次，中线映射为中线，而分角线（高）不一定映射为分角线（高）．重心映射为重心，但垂心（高线的交点）通常不映射为垂心.

我们的基本问题就是建立多面体的截面，即建立这两个集合的交．同时，通常多面体的映象被认为是已知的，而截面是由三个点在映象上给出（有时是直线及点）．像通常在几何作图中一样，只能用直尺和圆规．如果找到了截面与多面体的侧面相交的所有的线段，问题就认为被解决.

假设已知某些图形的映射（平面、直线、多面体），就要求在其中找到有关原来图形确定象点的某些几何对象（点、线段、多边形）的映象，这就是我们要考虑的问题.

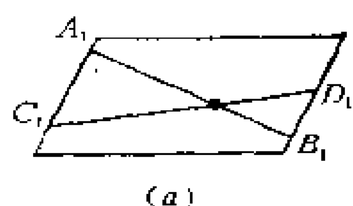
2．辅助性的问题

首先转到问题的基本方面，考虑对于确定相交直线及平面的某些辅助方法.

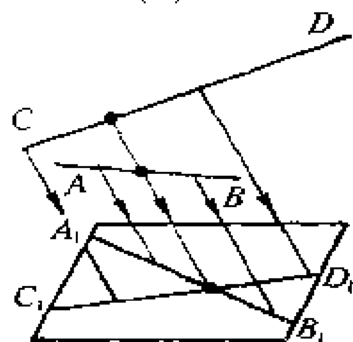
Ⅰ．两个相交直线的交容易找到．图中的交点也就是它们在空间中交点的描绘．但是，要当心！这只是假定实际上

直线相交才是对的，（空间的直线，通常是异面的！）不要犯错误（图 2 ）.

Ⅱ. 直线 AB 及平面 α 的交并不复杂，如果已知点 A、B 在 α 上的平行投影 A_1B_1，在图中的作法是清楚的（图3）.



(a)



(b)

图 2

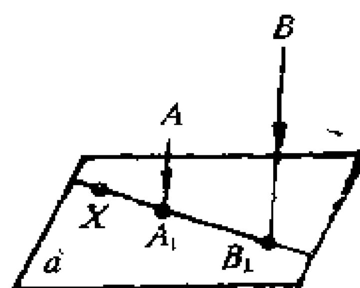


图 3

Ⅲ. 通过点 A，B 分别引两条相交的直线，当它与平面 α 的交点 A_1，B_1 给出时（图 4 ），直线 AB 与平面 α 的交在这种情形下是容易找到的.

Ⅳ. 如果给出点 A，B，C 在平面 α 上的平行投影 A_1，B_1，C_1，两个平面 α 与 ABC 的交在这种情形是容易找到的. 试独立探求它的作法（图 5 ）.

关于建立两个已知平面 ABC 与 α 的交的作法，能够指出许多的不同情形.

我们限定两种情形，读者可按图 6 及图 7 独立挑选.

3. 根据三个已知点作截面

这里系统地应用前节中叙述的方法. 读者可按动画系列片样式独立地进行探求.

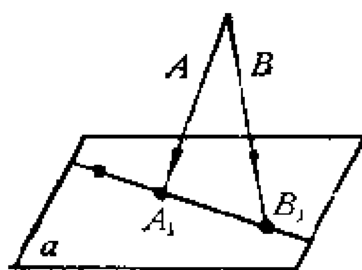
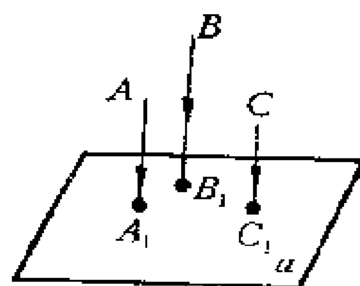
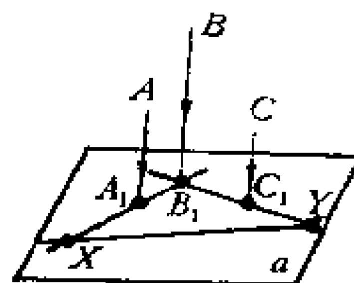


图 4

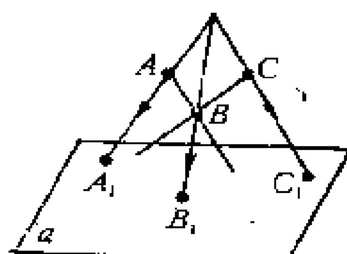


（a）

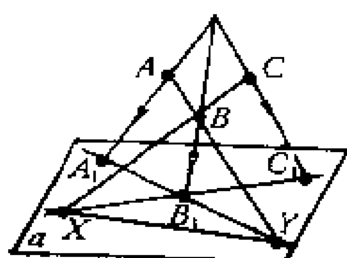


（b）

图 5

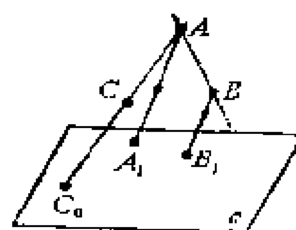


（a）

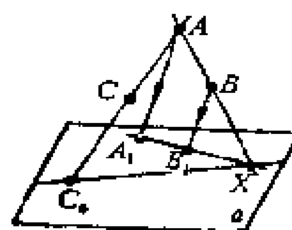


（b）

图 6



（a）



（b）

图 7

Ⅴ．由三点A，B，C给出的平行六面体的截面（如图8，a-f）．此处应作点A，B，C平行于侧棱的投影A_1，B_1，C_1（图8，b），运用问题Ⅱ，作X_1（图8，c）并寻找X_2，然后取新的投影方向（图8，d），求点X_4（再用问题Ⅱ），并且应用问题Ⅰ寻找点X_6及X_5（图8，e）．

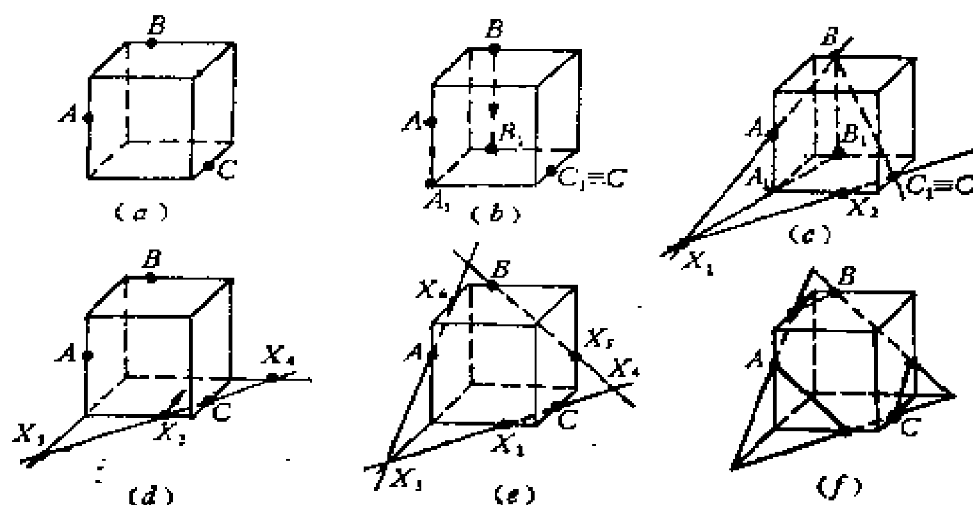


图 8

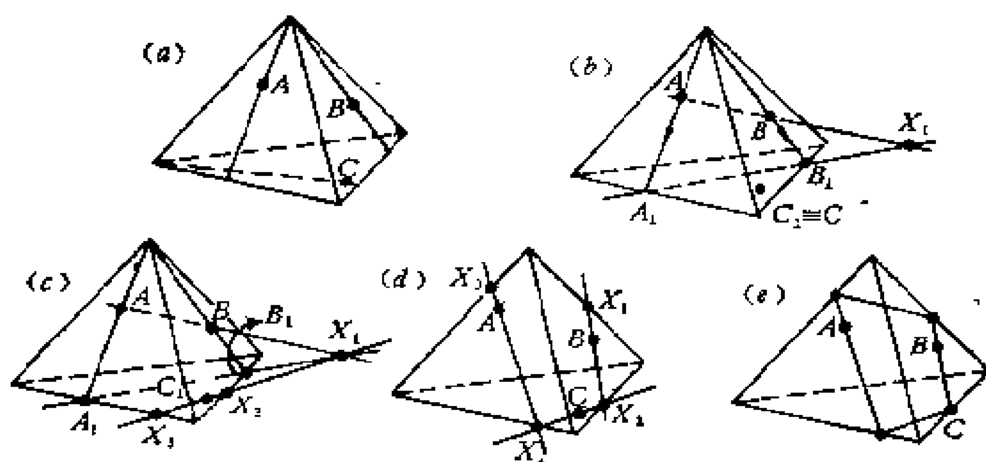


图 9

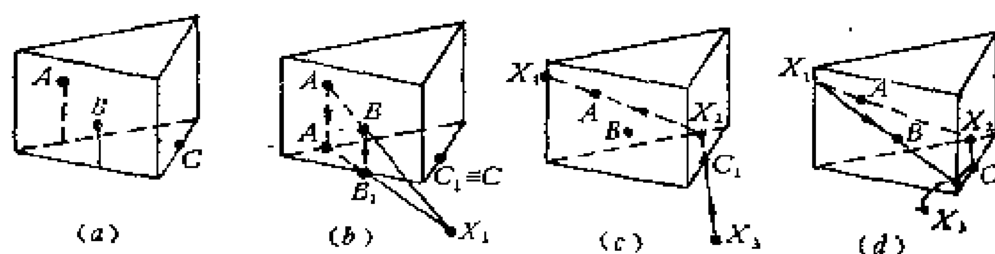


图 10

Ⅵ. 三棱锥的截面 ABC 如图 9a–e 所示，此处再次应用问题Ⅰ.

Ⅶ. 三棱柱的截面 ABC 如图 10a–d 所示. 此处应用问题Ⅱ及问题Ⅰ.

4. 平行的直线与平面

除了从前研究过的方法以外，还经常用到两个关于平行平面的定理：

（Ⅰ）两个平行平面为第三个平面所截，形成一对平行直线；

（Ⅱ）平行于直线 l 的两个平面，它们的交是平行于 l 的直线.

Ⅷ. 过给定点 C，D 平行于棱 AB 的三棱锥截面的作法，如图 11a–c 所示. 此处点 X_2，X_3 是作为过点 X_1 引的平行于 AB 的直线与对应界面的交点而得到的（见定理Ⅱ）.

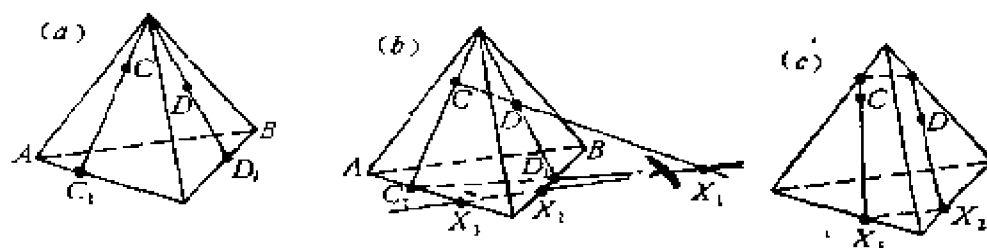


图 11

建议读者解决当点 X_2，X_3不是在棱上而是在它们的延长线上的情形.

Ⅸ. 用过高线 AA_1上的点M，平行于界面 ACD 的平面 α 截四面体，如图 12 a–d 所示. 此处两次用到定理 Ⅰ：*

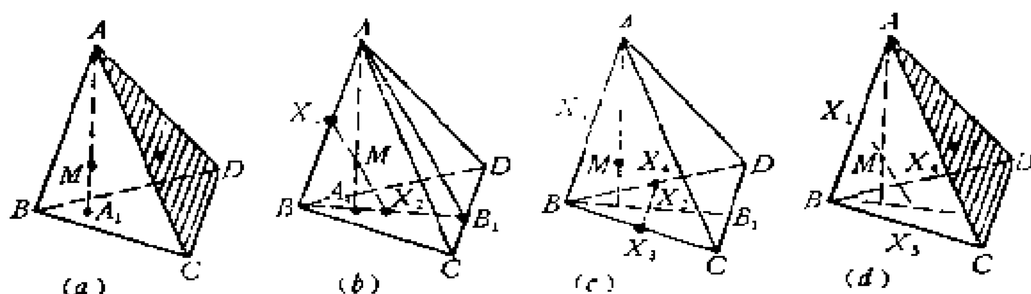


图 12

$$\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow X_1X_2 \parallel AB_1$$

及
$$\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow X_3X_4 \parallel CD.$$

Ⅹ. 用过点M平行于异面棱 AD 与 BC 的平面去截四面体 $ABCD$，如图 13a–c 所示. 此处两次用到定理 Ⅱ：$\alpha \parallel AD$ 与$(AA_1D) \parallel AD \Rightarrow MX_1 \parallel AD$，因此 $\alpha \parallel BC$，又

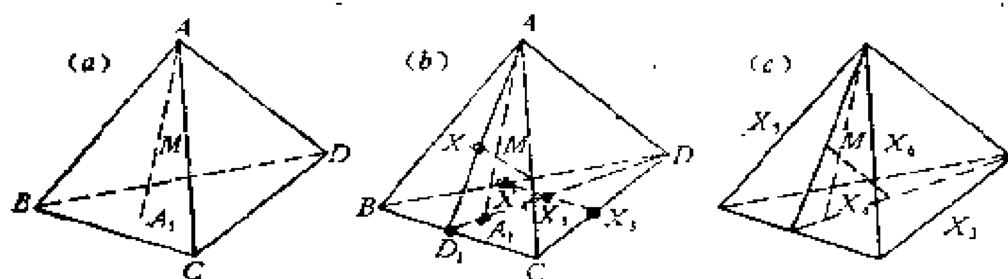


图 13

---

* 本文用 (ABC) 表示平面 ABC.

$$(BCD)\parallel BC \Rightarrow X_3X_4 \parallel BC.$$

5. 更为困难的问题

XI. 证明，不平行于已知平面的已知线段，可以在已知平面上平行投影为任意长的线段.

XII. 已知角的值，可以平行投影于已知平面上什么角的值?

XIII. 试证，如果对于平面图形中三个不在一条直线上的点已知它们的映象，则这个图形上的所有点的映象完全确定.

XIV. 证明给定的三角形的映象可以是任意的三角形*.

XV. 试证四边形的映象可以是任意的四边形，其中对角线的交点，分对角线所成的比例保持不变.

XVI. 试证四面体的映射是任意对角线交叉的四边形.

XVII. 一个大的立方体由若干个小的立方体组成，它们具有共同的顶点，而且它们的面平行. 试由已知三点构造所得图形的截面，使得

所有的三个点位于三个小立方体的异面棱上;

所有的三个点位于大立方体的三个不同的面上;

一点位于小立方体的上底面，而另外两点位于大立方体的不同的棱上.

译自《量子》1979年第1期

* 注意，映射的长短不起作用(参看第一节)，因此"任意的三角形"表示"具有相似准确程度的任意三角形".

十二、在构架里的圆锥

И.克勒维奇

在解圆锥的组合问题时，有时难于想象它们在空间的位置．如果断定考察的圆锥在“构架”中（多面体的棱形成的图形），则简化了圆锥的空间的认识．这时问题的对象变得更加“显著”，并且解题简单而迅速，这对于学生来说特别重要．首先我们证明一个定理．

定理 围绕着轴截面的顶角小于 $\pi/2$ 的圆锥可以外切一个棱锥，这棱锥的底面是个等腰三角形，而通过这个三角形顶点引的侧棱垂直于相对的侧面．

证明 在圆锥中作任意轴截面 ASB（图 1）．在圆锥的底平面上引切线 m 切圆锥的底于点 B．在轴截面 ASB 中，过点 S 作母线 SB 的垂线，直到同 BA 的延长线交于点 C，

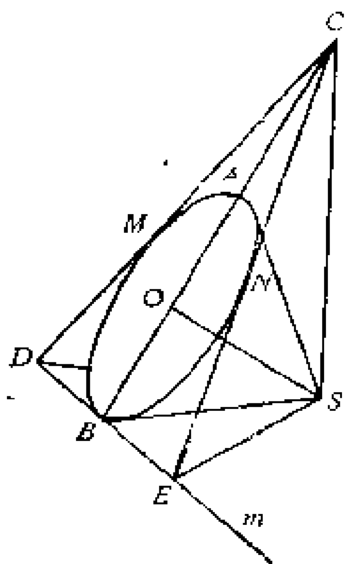


图 1

平面上的角 $A\widehat{S}B<\frac{\pi}{2}$，点 C 在圆锥外（在 BA 延长线上）．现在由点 C 对圆锥底圆引切线直到同直线 m 交于点 D 和 E（M，N 是切点）．

通过相交的直线 CE 和 CS，CD 和 CS，SB 和 DE 作平面得到围绕圆锥的外切棱

锥 $SCDE$*. 因为在三角形 CDE 中高线 CB 也是角平分线，则这个三角形是等腰三角形. 容易证明，界面 SDE 也是等腰三角形($|SE|=|SD|$).

因此，我们作的棱锥 $SCDE$ 是所求的棱锥. 这样的棱锥我们约定叫做已知圆锥的构架. 容易证明，合同的圆锥的构架棱锥是合同的.

现在我们转向问题.

例 1 两个合同的直圆锥具有公共顶点 S，高线为 h，底半径为 R($R<h$)，彼此相切并与平面 P 相切. 设 l 是两圆锥的底平面相交的直线，计算直线 l 与平面 P 之间的角.

由关系式 $R<h$ 得出，在圆锥轴截面顶点处的角的值小于 $\frac{\pi}{2}$. 围绕每个圆锥画出构架棱锥，使得它们具有公共的界面(见图 2). SB 是底的公共边，ZS 是棱锥的公共高. 侧棱 ZB 在直线 l 上，沿着它与圆锥的底面相交，因此，所给问题的解归结为确定角 ZBS.

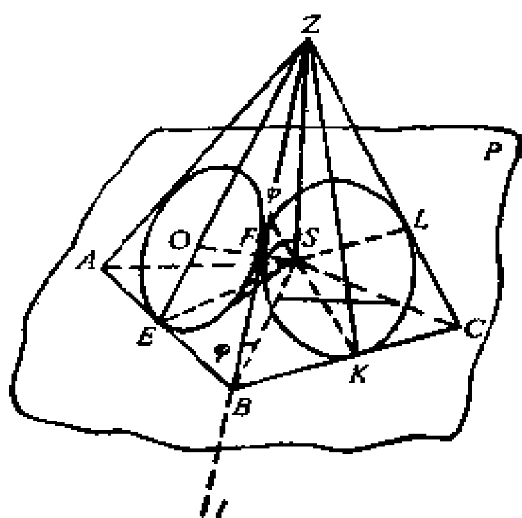


图 2

由圆锥的合同性得出，它们的底切棱 ZB 于同一点 F，所以 SF 是公共母线. 很清楚，$ZB\perp SF$. 因此，三角形 ZFS 是直角三角形，三角形

* 我们应作如下理解，如果棱锥的底外切圆锥的底圆，而棱锥的顶点与圆锥的顶点重合，这样的棱锥叫做围绕圆锥的外切棱锥.

SOE 也是直角三角形．因为 SO 是圆锥的高线．设 $\angle ZBS = \varphi$，则 $\angle ZSF = \varphi$．我们有

$$OE = R,\ SO = h;$$

$$\cos\varphi = \frac{FS}{ZS}\ (\text{由} \triangle ZFS).$$

但作为母线，$FS = ES$，则

$$\cos\varphi = \frac{ES}{ZS} = \text{ctg}\angle SEZ. \text{ 由} \triangle SOE:$$

$$\text{ctg}\angle SEZ = \text{ctg}\angle SEO = \frac{R}{h}. \text{ 这样一来，}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{h};$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{h}.$$

注释：如果假设 $\angle ZES = \beta$，则由这个问题的解我们得到下面关系式：

$$\cos\varphi = \text{ctg}\,\beta \qquad (*)$$

今后我们将利用这个关系式．

例 2 两个合同的圆锥具有公共顶点并且沿着一条母线相切．圆锥轴截面顶角的值等于 $2\alpha < \frac{\pi}{2}$，求与圆锥相切但不通过它们的公共母线的两个平面之间二面角的值．

我们注意，条件 $2\alpha < \frac{\pi}{2}$ 不是偶然给出的，否则问题没有解(独立证明这一点)：

我们围绕每个圆锥画构架棱锥，使得它们的公共界面与这两个圆锥相切(图3)．棱锥的高ZO和Z_1O在通过已知圆锥的公共顶点O，垂直于构架棱锥的公共底面ODC的一条直线上．界面ZCO与Z_1CO在通过ZZ_1作的一张平面上．类似地，界面ZDO与Z_1DO也共面．两个圆锥沿着母线OA相切并且与二面角ZZ_1的两个界面ZCZ_1和ZDZ_1相切．我们得到了两个圆锥及在问题条件中指出的平面的位置．根据条件$\angle AOB=\alpha$，要求的是平面ZCZ_1和ZDZ_1形成的二面角的值，也就是$\angle COD$的值．我们设

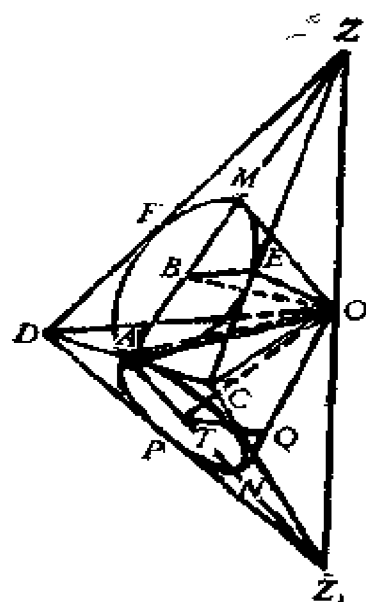


图 3

$$\angle AOC=\varphi,\ 则\angle ACO=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

进一步容易察觉，直角$\triangle OAC$与OEC全等．所以

$\angle ECO=\angle ACO=\frac{\pi}{2}-\varphi$．由关系式(*)(见上题注释)推出

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ 或者\ \sin\varphi=\operatorname{tg}\alpha.$$

这意味着

$$\angle COD=2\arcsin\operatorname{tg}\alpha.$$

例 3 在平面上放有三个合同的具有公共顶点的圆锥. 它们中每一个都切于另外两个. 求这些圆锥之一的轴截面的顶角.

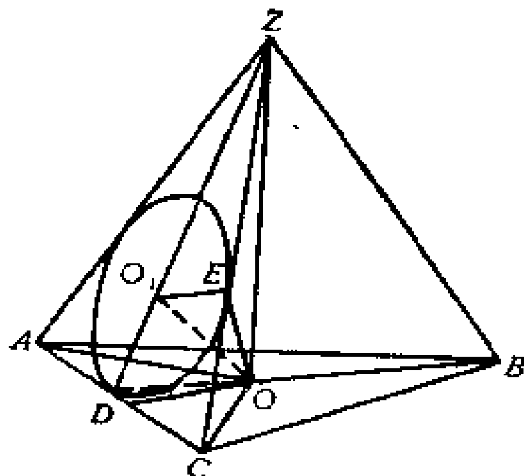


图 4

不难想象, 如果围绕已知圆锥每一个画构架棱锥, 则得到正三棱锥 $ZABC$, 在它里面"内切"有三个已知的圆锥, 它们的公共顶点在棱锥的底面中心, 而圆锥的底面是棱锥侧面的内切圆 (图 4, 对于问题的解, 只考虑已知的圆锥中的一个就足够了).

因为棱锥 $ZABC$ 是正棱锥, 则

$$\angle DCO = \frac{\pi}{6}.$$

正如前面指出过的,

$$\operatorname{tg} \angle DOO_1 = \cos \angle DCO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

这样一来, 所求的角等于

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 4 六个合同的圆锥具有共同的顶点, 同时每个圆锥都与另外四个圆锥各有一条公共的切线. 求六个圆锥体积的总和对与所有圆锥底面都相切的球的体积之比.

为了解这个问题，作为构架，我们选择立方体．圆锥的公共顶点处于立方体的中心，圆锥的底面内切于立方体的界面（图5，只画出了圆锥中的一个）．这时，六个圆锥的每一个都同另外四个圆锥有着公切线，而切每个圆锥底面的球是这个立方体的内切球．设立方体棱长等于 a，则一个圆锥的体积

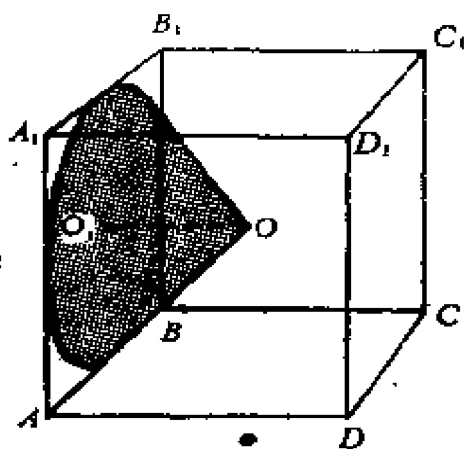


图 5

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{24},$$

而六个圆锥体积等于$\frac{\pi a^3}{4}$．球的体积等于$\frac{\pi a^3}{6}$，由此求出所求的比值，它等于 3:2．

练 习 题

1．两个直圆锥，每一个的轴截面都是边长为 a 的等边三角形，两个圆锥躺放在水平平面上相切且具有公共的顶点．求这两个圆锥底面的切点离平面的高度？

2．四个相等的圆锥具有公共顶点，同时每个圆锥都与另外三个有一条公共的母线．求圆锥体积总和对与圆锥底面相切的球的体积之比．

3．在平面上躺放有 n 个合同的直圆锥，它们具有公共的顶点也是这平面上的一点，每个圆锥都与另外两个圆锥相切，求圆锥轴截面顶角的值．

译自《量子》1977 年第 2 期

十三、哪一点是垂足？

И·梅里尼柯

解决立体几何问题，应当学会正确地确定出现在图形中元素的相互位置．许多错误可能是在解决有关表示棱锥（或棱柱）的高时出现的．垂足在底面的位置不对，是由于错误地定义侧棱对底面倾斜的角度，构造二面角的平面角等等．

以下列出的习题及例题，将向我们指明在解决立体几何中的问题时，应避免类似的错误．为此在本文的开头，我们对三个问题给出各种情形的答案．当然，对正确答案的推测，应当有所依据．配备这些习题，就容易解决选自入学考试试题的实例．

问题1 棱锥$SABC$高的垂足是平面ABC上怎样的点，如果：

Ⅰ．它们的侧棱相等；

Ⅱ．侧棱与底面组成的角相等；

Ⅲ．侧面与底面形成的角相等；

Ⅳ．在顶点S的面角为直角；

Ⅴ．两条对棱互相垂直；

Ⅵ．侧棱彼此相等，而且

$\angle ASB=\angle ASC=60°$，$\angle BSC=90°$；

Ⅶ．$\angle ACB=90°$，$AC\perp BS$；

Ⅷ．$\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$？

可能的答案：

1. $\triangle ABC$ 中线的交点；

2. 它的高线的交点；

3. $\triangle ABC$ 的外接圆圆心；

4. $\triangle ABC$ 的内切圆圆心；

5. $\triangle ABC$ 的内切圆圆心，或它的旁切圆圆心；

6. BC 的中点；

7. 直线 BC 上的点.

对于解题，经常要在本质上确定哪一点是棱锥的垂足，或位于它外面的垂足.

问题 2 棱锥 $SABC$ 的侧棱与底面所成的角彼此相等. 在什么充分条件下，棱锥的高 SO 的垂足属于$\triangle ABC$？

可能的答案：

1. $\triangle ABC$——等腰的；

2. $\triangle ABC$——等边三角形；

3. $\triangle ABC$——直角三角形或锐角三角形；

4. $\triangle ABC$——钝角三角形；

5. 这些情形之一.

问题 3 梯形 $ABCD$ 位于棱锥 $SABCD$ 的底面（$BC /\!/ AD$, $BC<AD$）. 棱锥的侧棱彼此相等. 在什么充分条件下，棱锥的高 SO 的垂足落在梯形 $ABCD$ 之外？

可能的答案：

1. 若$\angle ABD \leqslant 90°$；

2. 若$\angle ABD > 90°$；

3. 若$(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}}) \geqslant 90°$；

4. 若$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}}) > 90°$；

5. 以上情形都不成立.

以下由入学考试题中，选择具有特色的两个例题.

例 1 三棱锥的侧棱具有相同的长度 l．在棱锥顶点的两个面角为 α，而第三个面角为 β．试求棱锥的体积．

解 令 $SABC$ 是已知的棱锥．$\angle ASB=\beta$，$\angle ASC=\angle BSC=\alpha$．由问题的条件，我们求得：

$(\triangle ASC\cong\triangle BSC)\Rightarrow(AC\cong BC)$；

高 SO 的垂足 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆心(问题 1，Ⅰ)．可能有三种情形(参看问题 2)：

Ⅰ．$\angle ACB<90°$——垂足位于 $\triangle ABC$ 内(图 1)；

Ⅱ．$\angle ACB=90°$——垂足是线段 AB 的中点(图 2)；

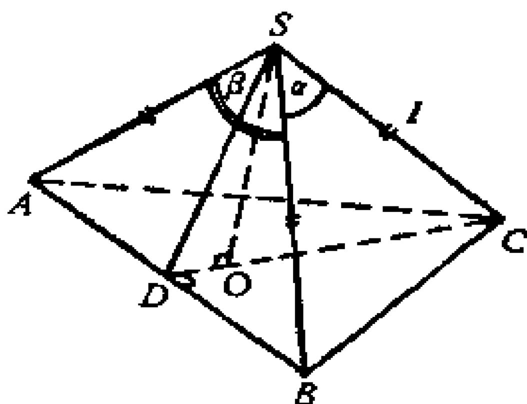


图 1

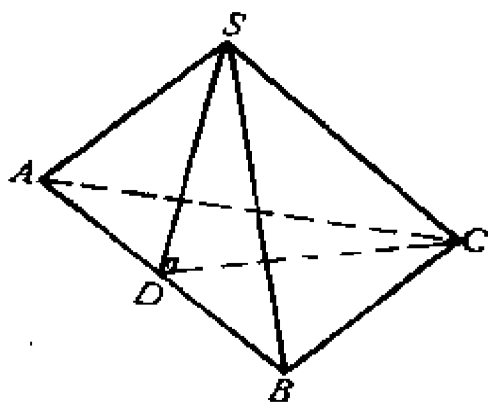


图 2

Ⅲ．$\angle ACB>90°$——垂足在 $\triangle ABC$(图 3)的外部．命 D 表示线段 AB 的中点．

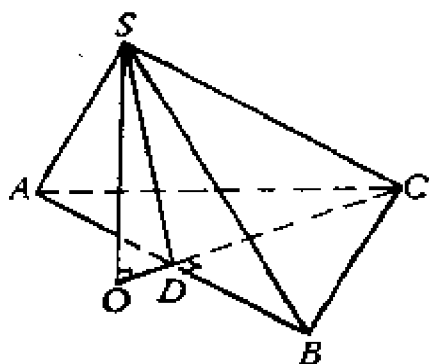


图 3

情形Ⅰ，由问题条件，得

$$AB=2l\sin\frac{\beta}{2},$$

$$SD=l\cos\frac{\beta}{2},$$

$$AC=BC=2l\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$CD=\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

命 $OD=x$，由$\triangle SOD$

$$SO^2=l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2;\ \text{由}\triangle CSO$$

$$SO^2=l^2-(CD-x)^2$$

$$=l^2-l^2+2l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$-x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

$$x=l\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$h=SO=\sqrt{l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-l^2\frac{\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\right)^2}{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$=l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

这就是说，

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha} \tag{1}$$

注　由$\angle ASB<\angle ASC+\angle BSC$，有不等式$\beta<2\alpha$成立，且根号内的表达式是正的．但在解答中对于研究表达式的定义域不作要求．

情形Ⅱ，存在这种情形，当且仅当

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

事实上，如果$\angle C=90°$，$CD=AD=l\sin\frac{\beta}{2}$，

$CD=AC\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}l\sin\frac{\alpha}{2}$（图2）．相反地，如

$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则

$$CD=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=l\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{1-\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2}\,l\sin\frac{\alpha}{2}$$

因此 $\cos\angle ACD = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

由此 $\angle ACD = 45°$, $\angle C = 90°$.

若 $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, 则

$$h = |SD| = l\cos\frac{\beta}{2}$$

$$V = \frac{l^2}{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\times l\cos\frac{\beta}{2},$$

$$V = \frac{l^3}{6}\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}\text{(图 2)}. \qquad (3)$$

情形Ⅱ，命 $x = OD$(图 3). 如情形Ⅰ，得

$$x = l\frac{\cos\alpha - \cos^2\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$h = OSO = l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1 - 2\cos\alpha - \cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$V = \frac{1}{3}l^2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}.$$

我们见到，情形Ⅰ与Ⅱ的解答全同，虽然它的结果不相同. 不仅如此，不难验证，在情形Ⅱ，这个答案也同样适用(利用表达式(2),在式 (1) 中将含 α 的表达式替换，即得式(3)).

答案

$$V=\frac{l^3}{3}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}$$

着重地说，如果仅选择情形 I 的解法，不能认为是全面的.

例 2 棱锥 $SABC$ 的底面是三角形，其中 $AB=BC=20\text{cm}$，$AC=32\text{cm}$；每个侧面与底面之间的角为 45°. 试求棱锥的体积.

解 棱锥高线的垂足是距 AB，AC，BC 等距的点，它是$\triangle ABC$ 的内切圆心，或它的一个旁切圆心（问题 I，II）. 因此就有四个棱锥满足问题的条件，它们的高线的垂足是点 O_1，O_2，O_3，O_4（图 4）. 为了计算这些棱锥的体积，因为底面面积等于 $S=S_{\triangle ABC}=192\ \text{cm}^2$，所以确定高 SO_1，SO_2，SO_3，SO_4 就够了. 因为侧面对于底面的倾角为 45°，棱锥的高等于 $\triangle ABC$ 内切圆的半径，或它的一个旁切圆的圆心是棱锥高线的垂足.

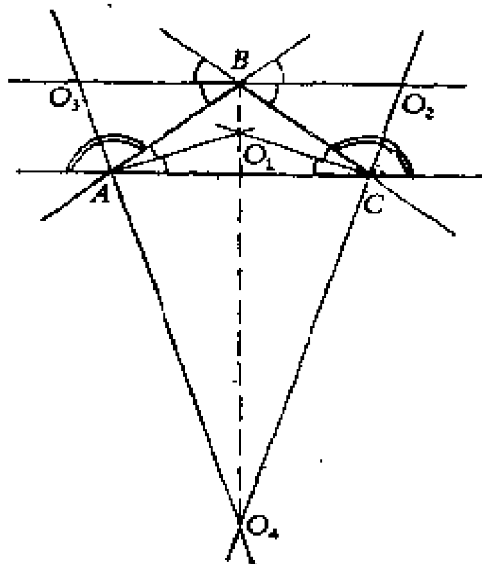


图 4

I. 具有高 SO_1 的棱锥.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(20+20+32)r_1$$

$$=36r_1(\text{cm}^2);\quad 36r_1=192,$$

$$r_1=h_1=5\frac{1}{3}\text{cm},\ 因此 V=341\frac{1}{3}(\text{cm}^3).$$

Ⅱ. 具有高SO_2与SO_3的棱锥全等. 我们有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(ACr_2-BCr_2)$$

$$=16r_2(\mathrm{cm}^2);$$

$16r_2=192$, $r_2=h_2=12\mathrm{cm}$; 由此得

$V_2=V_3=768(\mathrm{cm}^3)$.

Ⅲ. 具有高SO_4的棱锥, 我们有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(AB\cdot r_4+BC\cdot r_4-AC\cdot r_4)$$

$$=4r_4(\mathrm{cm}^2).$$

$4r_4=192$, $r_4=h_4=48\mathrm{cm}$;

$V_4=3072(\mathrm{cm}^3)$.

答案: $\left\{341\frac{1}{3}\mathrm{cm}^3;\ 768\mathrm{cm}^3;\ 3072\mathrm{cm}^3\right\}$.

练 习 题

1. 棱锥的底面是等腰梯形. 它的底边为a及$2a$. 棱锥的侧面对底面有相同的倾角; 棱锥的高等于a. 试求棱锥的侧面积.

2. 棱锥$SABC$的底面为三角形ABC, 其中$AB=a$, $BC=b$. 棱锥的一个侧面过AC边, 且垂直于底面, 其它的两个侧面与底面组成相同的角. 试求棱锥$SABC$与$SOBC$体积的比, 此处O为棱锥$SABC$高线的垂足.

3. 棱锥$SABC$的底面为直角三角形ABC, 斜边$AB=c$及锐角α. 已知侧棱SC对底面的倾角为β, 有向线段$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$按其位置的顺序组成闭合的折线, 试求所给

棱锥的体积。

4． 平行六面体的底面是一个边长为 b 的正方形，而它的所有的侧面是菱形，它的上底面的一个顶点距其下底面的所有顶点等远．试求平行六面体的体积。

5． 三棱柱的底面是等腰直角三角形 ABC．腰 AB 及 AC 的长等于 a．侧棱 AA_1，BB_1，CC_1 对底面组成 $60°$ 的倾角，而侧面 CBB_1C_1 的对角线垂直于棱 AC．已知对角线 BC_1 的长等于 $a\sqrt{6}$，试求棱柱的体积。

译自《量子》1980 年第 4 期

十四、多面体的相交和旋转

H.奥斯得罗夫斯基

教学大纲趋向于对几何变换特别是图形的旋转，给以很大的注意．在数学小组的会议上我们研究：如果旋转的不是平面图形，而是空间图形这类“非标准”的问题．对这样的问题必须很好地想象：旋转以后，在空间中图形是怎样放置的．所以，没有几何的想象来拟定解题思路是困难的，而通过实践能够发展这种想象．我们打算提供的习题，将对读者在这方面会有帮助．

问题1 棱长为a的立方体绕连接不属于立方体同一界面的两条平行棱的中点的直线旋转90°，求原立方体与旋转后立方体公共部分的体积．

我们拟定解题的途径．设M和N是立方体的不属于同一界面的两条平行的棱的中点(图1)．用垂直于线段MN的对角面分割立方体．我们得到两个棱柱．旋转之后每个棱柱

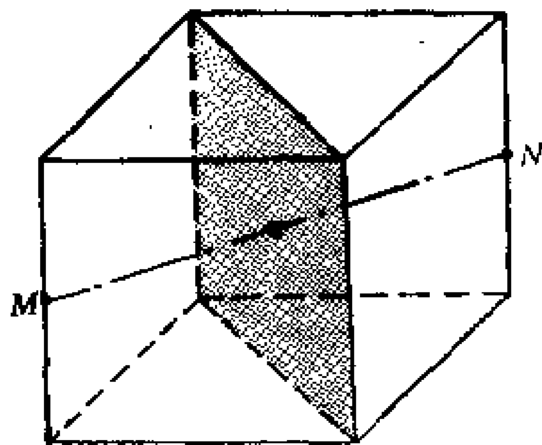


图 1

和原立方体的公共部分，将是直平行六面体，它的底是边长为a的正方形，以及同样的底面顶点在点M或N的正四棱锥所合成．（图2）．所以所求的立方体的公共部分的体积V等于平行六面体与四棱锥体积之和的两倍．现在求平行六面体的高AA_1的长．

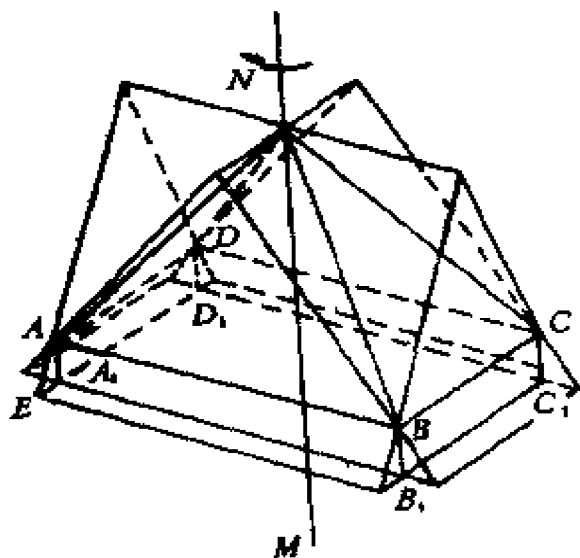


图 2

$$AA_1=EA_1$$

$$=a\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

而棱锥的高

$$\frac{MN}{2}-AA_1=\frac{a}{2},$$

我们得到：

$$V=2\left(\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{2}+a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right).$$

问题2　两个棱长为a的立方体的两条对角线在一条直线上，第二个立方体的一个顶点同第一个的中心重合并且第二个立方体绕着关于第一个对角线转动60°．求这两个立方体公共部分的体积．

设$ABCDA_1B_1C_1D_1$是已知的立方体并且第二个立方体由它平行移动变顶点B为对角线BD_1的中点O，再绕BD_1

轴旋转 60°而得到(图 3)．可以首先进行旋转，然后平移．旋转后点 B_1处在平面 BA_1D_1上(独立证明这一点)，所以容易求出，平移以后线段 OB_1'(线段 BB_1的象)交线段 A_1D_1于这样一点 L，使得 $LD_1=3a/4$．两个立方体的公共部分将由两个三棱锥 D_1KLM 和 $OKLM$ 组成，这两个三棱锥每一个的侧棱之间都形成直角，而这些侧棱的长都等于 $3a/4$．由此我们得到解答：

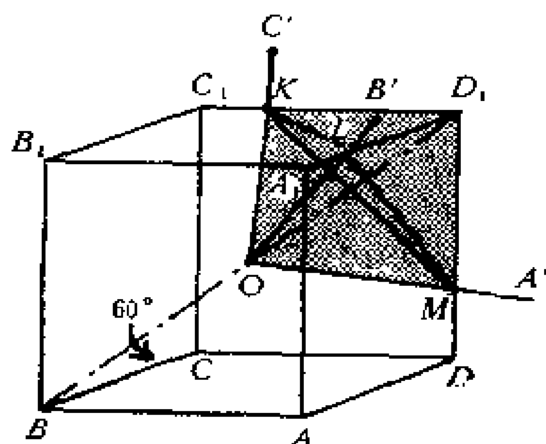


图 3

$$V=2\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}a\right)^3=\frac{9a^3}{64}.$$

问题 3 证明，如果正四面体绕连结它的任意两条异面棱的中点的直线转动 90°，然后将所得的四面体绕连结它的任意两条异面棱的中点的直线转动 90°．则最后的四面体与原来的四面体重合．

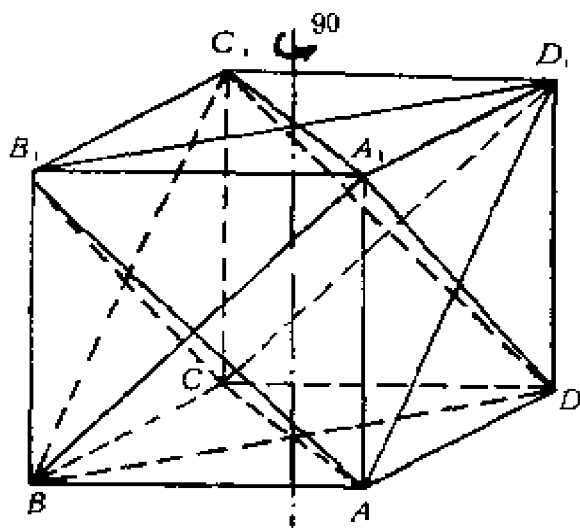


图 4

如果通过正四面体的每条棱作平行于对棱的平面，则这些平面限定了一个立方

体（图 4）．用线段连接立方体的不相邻的顶点，我们重新得到四面体——原来的 A_1BDC_1 或者还有一个 CB_1D_1A．不难确认，在旋转时，问题中描述的四面体 A_1BDC_1 变为四面体 D_1B_1AC，而四面体 D_1B_1AC 变为四面体 A_1BDC_1．所以两次旋转以后，四面体变为自身．

练 习 题

1． 底边为 a 的正三棱锥绕它的高转动 60°角．如果棱锥侧面是直角三角形，确定原来的棱锥与转动后的棱锥公共部分的体积．

2． 两个棱长为 a 的立方体其中一个由另一个绕公共的对角线旋转 60°而得到．求它们公共部分的体积．

3． 两个棱长为 a 的一样的正四面体具有公共的高线．而它们每一个的顶点都位于另一个的底面的中心．第二个四面体的底关于第一个的底转动 60°．求它们公共部分的体积．

4． 两个棱长为 a 的一样的正四面体具有连接两个对棱中点的公共线段，但一个四面体对于另一个转动 90°，求它们公共部分的体积．

译自《量子》1977 年第 11 期

十五、相交体的问题

И.沙雷金

本文将向您介绍对解相交体的体积十分有用的方法．我们举的例题都是十分难解的，解它们的主要困难在于，需要您有很好的空间想象力．特别强调指出，在解有关相交体问题时，会画出好的图形是很重要的．解题的成效直接与所画的图形有关．我们在讲解分析问题之前仅向您提个要求：请您在看完一个问题的条件之后，不要立刻看它的解答．要思考一段时间试着画出图形，并独立地去求解．当您解出以后，再与文中的解答对照比较．完全可能，您的解法比文中的解答要好．假如您没有解出题目，那么当您看完解答以后也要分析思考一下自已失利的原因，然后再往下阅读．

问题 1 在棱长为 a 的立方体中安放三个正四棱柱．它们每个的顶点是立方体两个相对界面棱的中点．求属于所有这三个棱柱的立方体部分的体积．

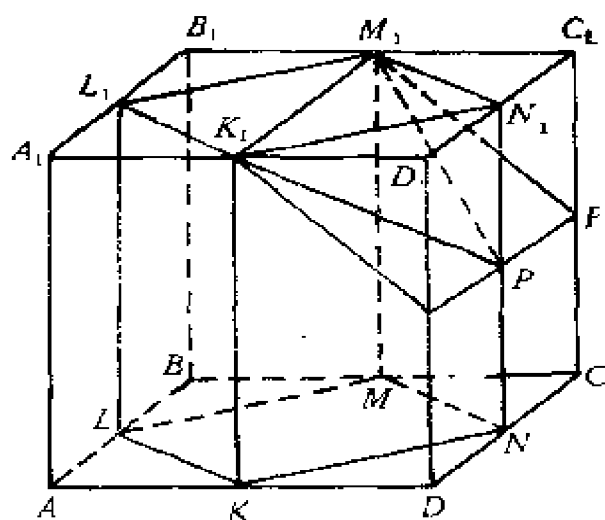


图 1

因为想象所求的物体十分困难，而立刻描绘所求的立体就更加困难，我们按下列方式进行．首先在立方体中安放一个棱柱（图 1），然后由第二个去截它，最

后，剩下我们添加第三个棱柱去截前两个棱柱的公共部分.

设第二个棱柱的顶点是棱 AA_1，A_1D_1，D_1D，AD，BB_1，B_1C_1，C_1C 和 CB 的中点（这个棱柱的底在立方体的"前面的"和"后面的"界面上）．第二个棱柱的连接立方体棱 DD_1 与 CC_1 中点的棱，交线段 NN_1 于它的中点．这意味着，通过 K_1M_1 与棱 DD_1 和 CC_1 的中点作的第二个棱柱的界面与面 KK_1N_1N 相交于直线 K_1P，而第二个棱柱所有这个界面由第一个棱柱截去一个棱锥 $K_1M_1PN_1$.

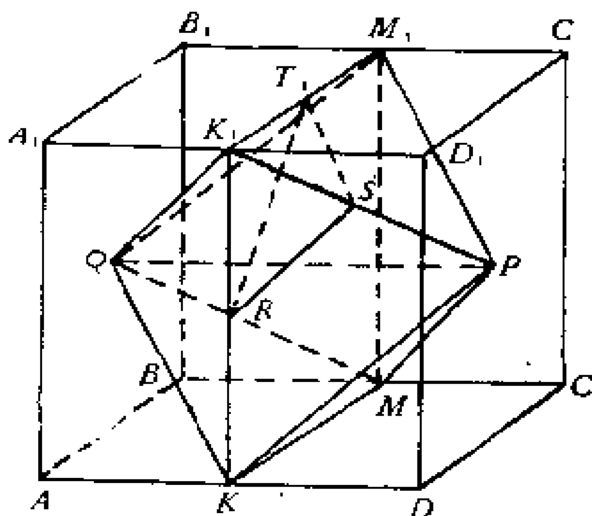


图 2

对剩下的第二个棱柱的界面进行类似的讨论，我们可以描绘出前两个棱柱的公共部分.（图2）．它是两个四棱锥：KK_1M_1MP 和 KK_1M_1MQ（P 和 Q 分别是界面 DCC_1D_1 与 ABB_1A_1 的中心）两个体积之和等于 $\frac{a^3}{3}$，因为 $S_{KK_1M_1N}=a^2$ 并且 $PQ=a$.

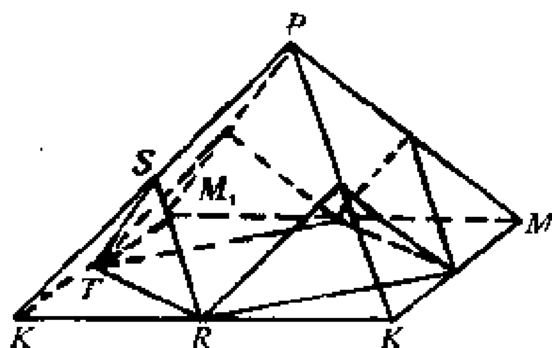


图 3

现在我们考察由这个立方体上"截削"两底在界面 ABB_1A_1 和 DCC_1D_1 上的第三个棱柱．这个棱柱的侧面"削去"四个顶

点：K_1，M_1，K和M．在图3中描绘的棱锥KK_1M_1MP带有被第三个棱柱“削去”的角．“削去”的角是相等的三棱锥．（它们中之一是$RTSK_1$，其中R，T和S是KK_1，K_1M_1和PK_1的中点），它们每一个的体积是棱锥KK_1M_1MP体积的1/16．（这容易检验，例如，棱锥$RTSK_1$的体积是棱锥KM_1PK_1的1/8．而KM_1PK_1的体积又是棱锥PKK_1M_1M体积的1/2．详细的计算与证明请独立进行）．

这样一来，由棱锥截去$4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$部分，所有三个棱柱公共部分的体积占第一和第二个棱柱公共部分体积$\frac{a^3}{3}$的$\frac{3}{4}$，也就是等于$\frac{a^3}{4}$．

问题2 已知两个相等的正三棱锥，每一个的体积是V，关于点O对称地放置着．如果点O在它们之一的高线上，并且由棱锥顶点算起分这高线为比2:1．求这两个棱锥公共部分的体积．

在这个问题中，作一个正确的、好的、有根据的图形极端重要，尽管这是很困难的．设$SABC$是第一个棱锥．第二个棱锥的底$A_1B_1C_1$交高SH_1于分它为1:2的点H（由顶点S算起），而与棱锥$SABC$交得一个与$\triangle ABC$相似的三角形MNP，$MN=\frac{1}{3}AB$．

由此容易得出（检验1），三角形MNP完全处于三角形

$A_1B_1C_1$的内部．类似地第二个棱锥被三角形ABC的平面截得的三角形$M_1N_1P_1$也完全处于底面ABC的内部．

现在可以描绘被考察的两个棱锥公共部呈现的立体(图4)．同时，像点L的位置这样去找：必须连结S与棱BC的中点，这条连线同直线S_1A_1相交给出点L(为了证明，考察用平面SA_1S_1去截棱锥)．在图4中其余的点可类似去求．为了计算所求的体积，我们应当由棱锥$SABC$的体积中拿去棱锥$SMNP$的体积(这个体积是$\frac{1}{27}V$)，然后拿去三个一样的都等于$KTRC$的棱锥的体积．并且添加三个等于QM_1RL的“小”棱锥的体积．

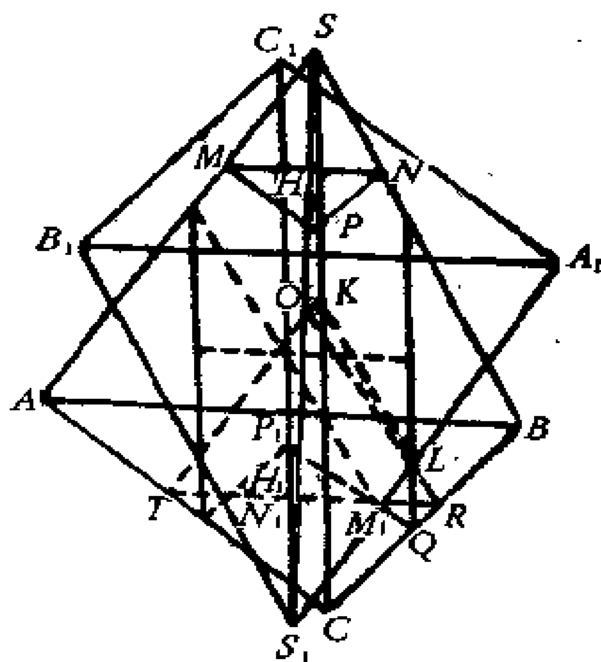


图 4

我们求棱锥$KTRC$的体积．因为平面KRT平行于平面SAB，则$V_{KTRC}=\left(\frac{TR}{AB}\right)^3V$．

类似地，$V_{QM_1RL}=\left(\frac{M_1R}{AB}\right)^3V$．但

$$M_1R=\frac{TR-M_1N_1}{2}=\frac{3TR-AB}{6},$$

我们剩下求$\frac{TR}{AB}$. 三角形 ABC 和 $M_1N_1P_1$ 是正三角形，它们的边分别平行且中心重合，有

$$M_1N_1=\frac{1}{3}AB.$$

由此容易求得，

$$\frac{TR}{AB}=\frac{5}{9},\quad \frac{M_1R}{AB}=\frac{1}{9}\text{（检验！）}$$

所求的体积等于

$$V-\frac{1}{27}V-3\left(\frac{5}{9}\right)^3V+3\left(\frac{1}{9}\right)^3V=\frac{110}{243}V$$

问题 3 已知立方体棱长为 a. 第二个立方体由已知的立方体绕它的对角线旋转 α 角而得到($\alpha\leqslant 60°$). 求这两个立方体公共部分的体积.

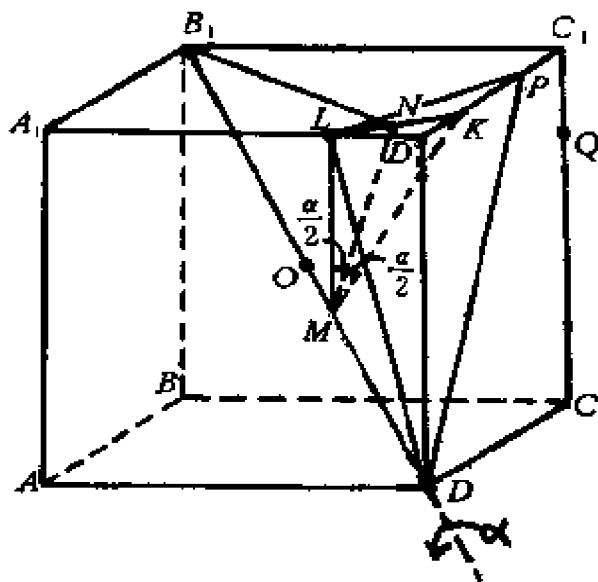


图 5

在这个问题中，在整体上想象描绘相交体是困难的. 容易明白，一个体的个别元素同另一体的元素是怎样相交的.

我们用字母 A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 表示已知立方体的顶点（见图 5），设立方体绕对角线 B_1D 反时针方向旋转，我们观察

原立方体当它旋转时能够“削去”怎样的一块．立方体的各顶点的位置离立方体的中心O最远，O是保持不动的对角线B_1D的中点．所以在旋转时，立方体内部不能超过顶点，反之顶点处于立方体外部，并且围绕顶点的部分将被削去．进一步，削去立方体的一块可以只是界面，所以，必须找到每个界面削去立方体是怎样的一块．

我们求界面DCC_1D_1削去什么？削去的是棱锥D_1LPD（见图5），其中$D_1L=D_1K=C_1P$，同时由点L和K向B_1D引的垂线足重合于一点（证明！），它在图5中用字母M表示，并且$\angle LMK=\alpha$．这样一来，当立方体旋转时点K变作点L．我们通过x表示LD_1（稍后我们求它）．设Q是棱CC_1上的点，$C_1Q=C_1P=x$．则在立方体旋转时点Q变作点P（证明！）．于是界面DCC_1D_1交立方体为三角形LPD．并且截棱锥D_1LPD体积是$\frac{1}{6}ax(a-x)$（证明！）．类似地考察其余界面——它们截去同样的棱锥．所以立方体公共部分体积是$a^3-ax(a-x)$．剩下求x．

设N是B_1D_1和LK的交点．我们绘出分图（图6）矩形BDD_1B_1．设T是由D_1向B_1D引的垂线足．我们有：

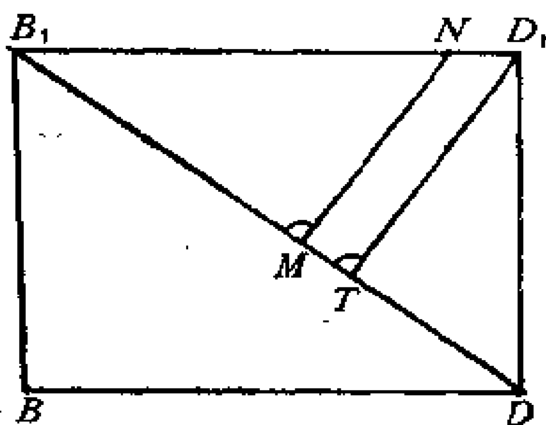


图 6

$$LN=ND_1=\frac{LK}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}\text{（见图 5）}.$$

由$\triangle LMK$我们得到：

$$MN = LN \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$B_1N = B_1D_1 - ND_1 = a\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

由$\triangle B_1D_1D$容易求得$D_1T = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

由$\triangle B_1NM$和$\triangle B_1D_1T$相似，我们得到

$$\frac{B_1N}{B_1D_1} = \frac{NM}{D_1T},$$

$$\frac{a\sqrt{2} - x\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{x\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

由此$x = \dfrac{2a}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$，所求体积等于

$$V = a^3 - \frac{2a^2}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}} \times \left(a - \frac{2a}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \frac{3a^3}{2[1+\cos(\alpha-60^\circ)]}.$$

问题 4 已知棱长为a的立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$它的两条相对棱AB和C_1D_1的中点是一个正四面体的两条异面棱的中点，同时这两异面棱中的一条位于立方体的相对应

的一条棱上．求立方体同四面体公共部分的体积．

设点K是AB中点，也是正四面体的棱PQ的中点．而M是D_1C_1的中点同时也是四面体的棱RS的中点（D_1C_1在RS上（图7））．

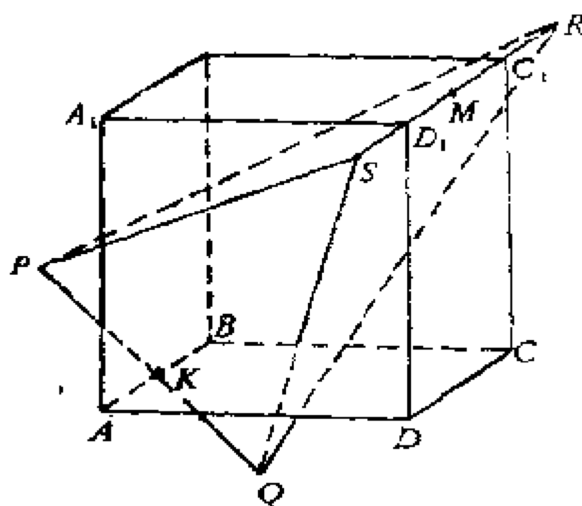


图 7

若四面体棱长等于b，则容易计算它的异面棱中点之间的距离，它等于$b\frac{\sqrt{2}}{2}$（检验！）．另一方面，$MK=a\sqrt{2}$，这意味着，$b=2a$．

我们知道四面体棱长，但是不能简单地画出所给立体的交，因为四面体的棱与立方体的交还不明确．为了回答这个问题，将所给立体在平面$ABCD$上投影（图8）．因为PQ同这个平面成45°角（证明！），则PQ在这个平面上射影的长是

$$b\frac{\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$$

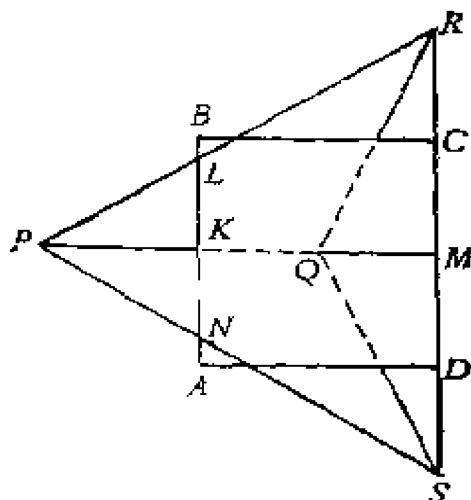


图 8

设L是直线AB和PR射影的交点．由$\triangle PLK$与$\triangle PMR$相似，容易求得：

$$LK=\frac{RM\cdot PK}{PM}=a\frac{1}{1+\sqrt{2}}<\frac{a}{2}.$$

这意味着，四面体的棱 PR（由此，另外的棱 PS、QR 和 QS）交立方体．

为了计算体积，将问题中的形体表为带有截去角的四面体是方便的．为了确定截去的每个棱锥占四面体体积的几分之几，利用下面的论断是方便的(独立证明它)，它经常能表现出一些效果．

给出两个棱锥 $SABC$ 和 $SA_1B_1C_1$，同时 A_1在 SA 上，B_1在 SB 上，C_1在 SC 上，则这两个棱锥体积的比等于由顶点 S 出发的三条棱长乘积的比，即

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA\cdot SB\cdot SC}.$$

现在可以很容易去求由顶点 P 和 Q “削去”的棱锥的体积．它们的每一个占四面体的部分是

$$\frac{PK}{PQ}\cdot\frac{PL}{PR}\cdot\frac{PN}{PS}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2(3+2\sqrt{2})}.$$

而由顶点 R 和 S“削去”的棱锥的体积占四面体体积的 1/16．(检验!)．四面体体积等于

$$\frac{b^3\sqrt{2}}{12}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$$

这意味着，立方体和四面体公共部分的体积等于

$$\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}-\frac{1}{8}\right)=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}(16\sqrt{2}-17).$$

练 习 题

1. 已知两个相等的正三棱锥，关于位于其中一个棱锥的高上的点O为对称．如果O点从棱锥顶点算起分这个高为比例(a) 3:1；(b) 1:1；(c) 4:1．求这两个棱锥公共部分的体积．

$$\left(\text{答：}(a)\frac{V}{2}；(b)\frac{2}{9}V；(c)\frac{12}{25}V\right).$$

2. 已知正四面体体积是V．第二个四面体是由已知四面体围绕连结四面体异面棱的中点的直线旋转α角而得到．求这两个四面体公共部分的体积．

$$\left(\text{当 } 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\text{时公共部分的体积等于}V\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}.\right.$$

提示：考察垂直于旋转轴平面交四面体得到的矩形，矩形对角线之间的角等于α．这样的矩形有两个)．

3. 三棱锥$PQMN$和立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$用下列方式放置，棱PQ的中点同棱AB的中点重合且$PQ=2AB$，棱D_1C_1在棱MN上，它们的中点重合．$MN=3D_1C_1$．如果已知PQ垂直于平面ABD_1C_1，立方体内部的棱锥体积是几分之几？

(处于立方体内部四面体部分对整个四面体体积之比等于$\frac{54-28\sqrt{2}}{27}$)

4. 一个正四面体的棱是另一四面体的侧高．第一个四面体的界面已知棱所对的侧高在第二个四面体的棱上．第一

个四面体在第二个内部的体积占怎样的部分？

$(2(2-\sqrt{3}))$

5. 立方体和正四面体的中心重合．四面体的两条棱平行于立方体一个界面的对角线．如果立方体棱长等于a，四面体棱长等于$\frac{3a}{2}\sqrt{2}$．求四面体处于立方体内部部分体积．

$$\left(\frac{23}{32}a^3\right)$$

6. 在正三棱锥的内部存在所有面角都是直角的三面角的顶点，而面角的平分线通过棱锥底面的顶点．如果已知棱锥的表面积被分为面积相等的两部分，问三面角的表面分棱锥的体积为怎样的比？

(3/11 由棱锥顶点算起)

7. 单位立方体的对角线在60°的二面角的棱上，证明，立方体在二面角内部部分的体积是个常值，并求出这个值．

(1/6．设二面角一个界面交立方体的棱于点M，另一界面交另一棱于点N．则这两个棱一定是由一个顶点引出的，我们表这个顶点为A，同时$MA+NA=1$)．

8. 立方体的棱长等于a，中心为O的球面交由顶点A出发的三个棱于它们的中点，由球面同立方体一个棱的交点B，向通过顶点A的立方体的对角线引垂线，同时这些垂线与半径OB之间的角被立方体的棱所平分，求球面的半径．

$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

9. 在正三棱锥中高等于h，底边等于a．底面的一个

顶点是切它所对棱锥侧面的球的中心．求棱锥侧面在球的内部部分的面积．

$$\left(\frac{9a^2h^2}{12h^2+a^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{12h^2+a^2}}{a\sqrt{3}}\right)$$

10．在四面体 $ABCD$ 中棱 AB 和 CD 互相垂直且分别等于 a 和 b，这两个棱公垂线交棱 AB 于点 M，交棱 CD 于点 N，$MN=c$，在四面体中内接立方体，使得立方体四条棱平行于 MN 并且四面体的每个面上有立方体的两个顶点，求立方体的棱长．

$$\left(\frac{abc}{ab+bc+ac}\right).$$

译自《量子》1974 年第 5 期

十六、面积与二面角的问题

Я·苏康尼柯　　П·高尔恩施坦

研究以下问题

问题 1　正三棱锥的一个侧面与底面形成二面角 α．它与平行于底面的截面相交，使得到的截面面积等于截头棱锥侧面面积．试确定底面面积与截面面积之比．

为了解这个问题，考察过高线和侧面的侧高截平面，那么经过相当复杂的计算后才得到解答 $1+\cos\alpha$．这里所求的比通过简单的量表示出来了，这是偶然的吗？显然不是．首要的就是应当存在问题的简单解．注意考查解答，所获得的关系联系到底面积 S、截面面积 Q（按条件它等于截头棱锥的侧面面积）及侧面与底面所成的二面角（图 1）．

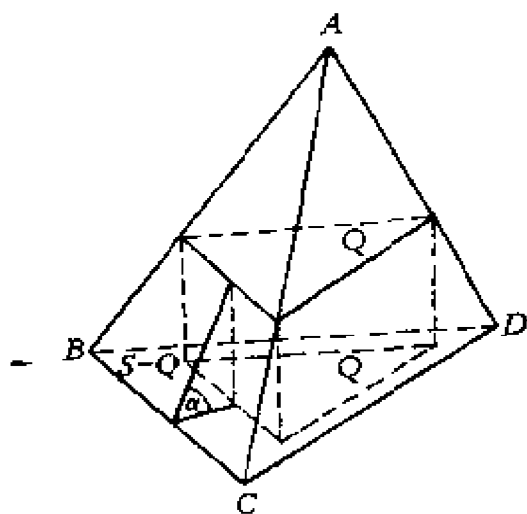


图 1

按照已知公式，多边形的正交投影的面积 $S-Q=Q\cdot\cos\varphi$，由此

$$\frac{S-Q}{Q}=\cos\varphi,\qquad \frac{S}{Q}=1+\cos\varphi.$$

在许多情况下，运用射影面积公式就能直接导致问题的

解。

问题 2 棱锥的底面是面积为Q的平行四边形，棱锥的顶点投影到平行四边形对角线的交点。一个侧面与底面组成角 α，而另一个侧面与底面组成角 β。试求棱锥侧表面积。

因为 $S_{\triangle BAC}=S_{\triangle DAE}$，$S_{\triangle CAD}=S_{\triangle EAB}$，

所以 $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COD}=\dfrac{Q}{4}$

（图 2），即得棱锥侧面的面积：

$$S_{侧}=2(S_{\triangle BAC}+S_{\triangle CAD})$$

$$=2\left(\frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\alpha}+\frac{S_{\triangle COD}}{\cos\beta}\right)$$

$$=2\left(\frac{Q}{4\cos\alpha}+\frac{Q}{4\cos\beta}\right)$$

$$=\frac{Q(\cos\alpha+\cos\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

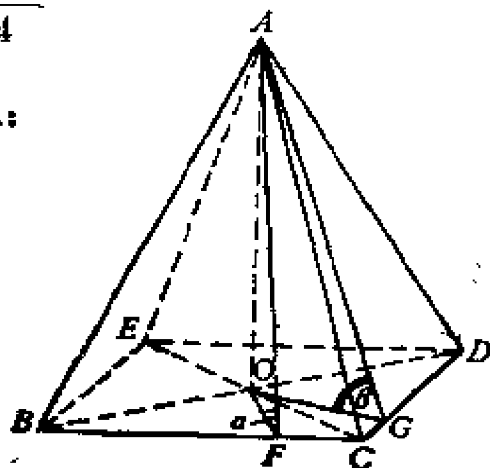


图 2

问题 3 在棱锥的底面，放置一个具有边长为a及夹角为锐角α的菱形，过底面锐角边的两个相邻侧面，分别垂直于底面；另外的两个侧面与底面的倾角为β。试求棱锥侧表面的面积。

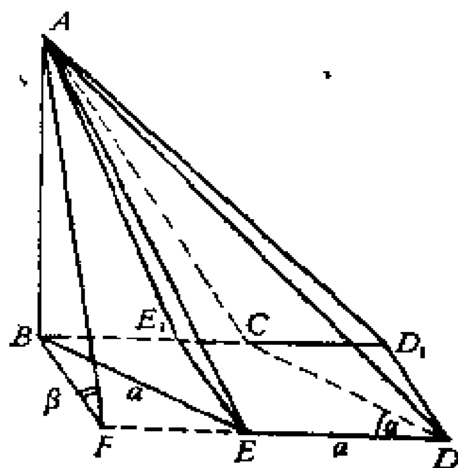


图 3

容易看到，侧面 EAD 在侧面 BAC 的投影 E_1AD_1（图 3）与侧面 BAC 等积，这两个平面间的二面角为$\dfrac{\pi}{2}-\beta$。

又平面 AED 在菱形底面上的投影是三角形 BED. 因此

$$S_{侧}=2(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle BAC})=2(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle B_1AD_1})$$

$$=2\left[S_{\triangle EAD}+S_{\triangle EAD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]$$

$$=2S_{\triangle EAD}(1+\sin\beta)$$

$$=2\cdot\frac{S_{\triangle BED}}{\cos\beta}\times(1+\sin\beta)$$

$$=\frac{a^2\sin\alpha(1+\sin\beta)}{\cos\beta}.$$

问题 4 在正四棱锥内有一内切球，这个棱锥的侧面是另一棱锥的底面，这另一棱锥的顶点位于球心，它的体积等于所给正四棱锥体积的 1/6. 试确定它的侧面与底面组成的二面角 α 及在四棱锥顶点的面角 β 的值.

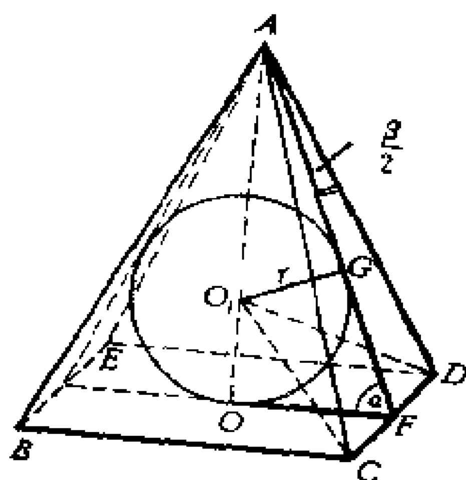


图 4

命正四棱锥的体积为 V，全面积为 S，底面积为 $S_{底}$，侧面积为 $S_{侧}$.

我们知道，将球心 O_1 与正四棱锥在同一平面上各顶点相连，构成高为 r 的四个棱锥，因此

$$V=\frac{1}{3}Sr.\ (图\ 4)$$

又 $\cos\alpha=\dfrac{S_{底}}{S_{侧}}=\dfrac{S}{S_{侧}}-1$

$$=\frac{\frac{1}{3}Sr}{\frac{1}{3}(4S_{\triangle CAD})\cdot r}-1$$

$$=\frac{V}{4V_{O_1CAD}}-1=\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{DF}{AF}=\frac{OF}{AF}=\cos\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

问题5 在正三棱锥中，它的侧面分别与底面及相邻侧面形成角 α 和 β，试建立它们之间的余弦关系式。

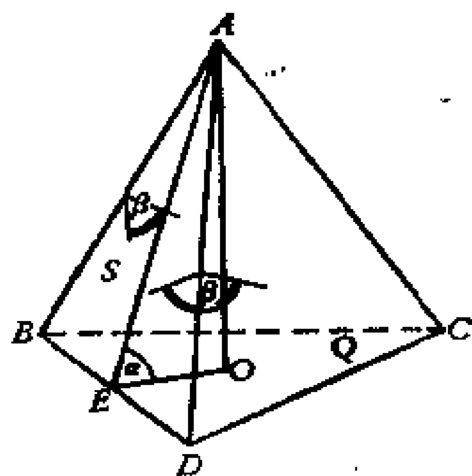


图 5

如图5，高 AO 与底面 BCD 垂直，$AE\perp BD$，$\angle AEC=\alpha$，$S_{\triangle BDC}=Q$，$S_{\triangle ABD}=S$。此时，将 ABD 面投影到 BCD 面，则得等式 $Q=3S\cos\alpha$，再将面 BCD，ABC 及 ACD 投影到面 ABD 上，则得等式

$$S=Q\cos\alpha+2S\cos\beta.$$

由这两个等式，就得到所求的关系

$$3\cos^2\alpha+2\cos\beta-1=0.$$

类似地容易证明，对于正 n 棱锥有一般公式：

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\alpha=\cos\frac{\beta}{2}.$$

有时应用正交投影面积公式不仅有益，而且能够使问题得到有效的解决.

问题 6 过截头正四棱锥底面的对角线作截面，又过下底面的边和与它相对的上底面的边作截面. 两个截面间的角为 α. 试求这两个截面面积之比.

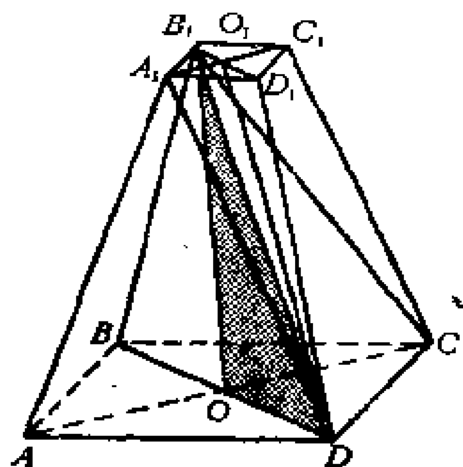


图 6

在这个问题中，主要是准确地作出图形，解答本身不会引起困难. 事实上，截面将是梯形 BB_1D_1D 及 DA_1B_1C（图 6），它们沿对角线 B_1D 相交而且它们组成角 α. 容易看出，点 A_1 投影到点 O_1，而点 C 投影到点 O（O 与 O_1 是底面的中心），因此面 DA_1B_1C 投影到四边形 DO_1B_1O 上，故得

$$\frac{S_{BB_1D_1D}}{S_{DA_1B_1C}}=\frac{2S_{DO_1B_1O}}{S_{DA_1B_1C}}=2\cos\alpha.$$

问题 7 已知立方体 $ABCDA'B'C'D'$，它的棱长为 1cm. 在棱 AA'，BB'，DD' 取相应的点 K，P，M，使得 $|AK|:|A'K|=1:3$，$|BP|:|B'P|=3:1$，$|DM|:|D'M|=3:1$，试求棱锥的体积，它的底面是过点 K，P 及 M 立方

体的截面，而其顶点位于点 A'.

不难找到截面与底面 $A'B'C'D'$ 相交于边 $B'C'$ 及 $C'D'$ 的中点 Q 与 N. 由此得知，截面 $KPQNM$ 在底面 $A'B'C'D'$ 的投影面积等于

$$S_{A'B'QND'}$$

$$=S_{A'B'C'D'}-S_{\triangle QC'N}$$

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\ \mathrm{cm}^2.$$

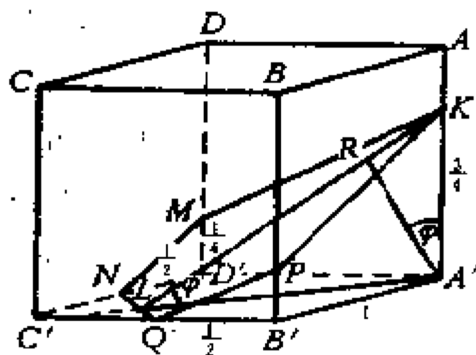


图 7

它与底面组成二面角的平面角是 $\angle KLA'$，而且它与角 $KA'R$ 相等（R 是棱锥 $A'KPQNM$ 的高 $A'R$ 的垂足），由此得知 $|A'R|=|A'K|\cos\varphi$.

利用投影面积公式，得知

$$V_{A'KPQNM}=\frac{1}{3}S_{KPQNM}\cdot|A'R|$$

$$=\frac{1}{3}\frac{S_{A'B'QND'}}{\cos\varphi}\cdot|A'K|\cos\varphi$$

$$=\frac{1}{3}S_{A'B'QND'}\cdot|A'K|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{32}\ (\mathrm{cm}^3).$$

练 习 题

1. 正十棱锥的侧面积等于S，而它的底面积为Q，试求棱锥的体积.

2. 正三棱锥的底面面积等于$\sqrt{13}$，在它顶点的面角的值是它的侧棱与底面的角度值的四倍。试求侧面的面积。

3. 点K与M是三棱锥$DABC$的棱AB及AC的中点，$S_{\triangle ABC}=p$，如果$S_{\triangle DKM}=q$，又棱锥的高的垂足与底面ABC的中线交点重合. 试求$S_{\triangle BCD}$面积.

4. 直平行六面体的底面是一正方形. 过底面的相邻边作对角截面，和底面组成角α，而两截面的交角为β. 试证

$$\cos^2\alpha=\cos\beta.$$

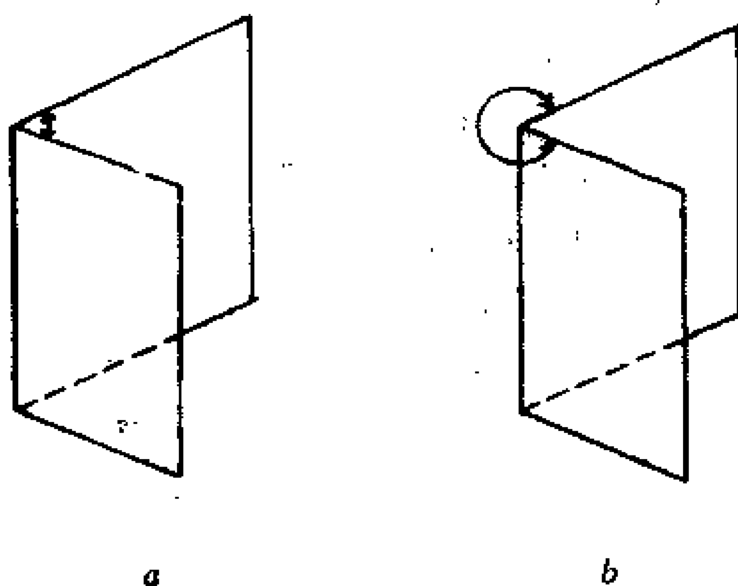
5. 有一个三棱锥，底面面积为Q，侧面面积为S，并且侧面与底面形成的二面角的和为3α，顶点投影于底面中线. 试证 $Q\leqslant S\cos\alpha$.

译自《量子》1977年第12期

十七、二面角和三面角

Б 莫·依法利夫

二面角 具有公共边界的两个半平面与由这两个半平面限定的空间区域中的一个的并，叫做二面角(图 $1a$)．我们着重强调的是：并非所有二面角都是两个半空间的交．(见图 $1b$)



a　　　b

图 1

用垂直于二面角的棱的平面截这个二面角所得平面角的值叫做这个二面角的值．在图 $1a$ 中二面角的值小于 π，而在图 $1b$ 中画的二面角的值大于 π．

二面角——空间中的角与在平面上的角对照，它的许多性质类似于平面角的性质．例如，凸二面角的平分面(即为分二面角为两个合同的二面角的平面)可以定义为二面角中

与它的两个界面距离等远的点的集合，象在平面上的一样，定义对顶二面角和补二面角．在这种情况下它们的值分别等于φ和$\pi-\varphi$．其中φ是原来的二面角的值．

现在我们分别解在某种意义下彼此互逆的两个问题．

问题 1 值为$\varphi(0<\varphi<\pi)$的二面角与一个平面相交，确定截线所得的角的值α取值范围？

问题 2 角φ是值为α的角的正交投影时，$(0<\alpha<\pi)$，角φ的取值范围？

对问题1的回答：$0<\alpha<\pi$．因为二面角的值小于π，它在自己界面的任一平面的一侧．所以，截线的角，在包括它任一边的那条直线的一侧，因此$\alpha<\pi$．剩下指出，对于$[0,\pi]$之间的任意α，存在与二面角相交的平面，截线所成的角的值是α．为此，最简单地是指出公共顶点在二面角的棱上，位于二面角不同界面的两条射线它们之间的角等于α（然后通过这两条射线引割平面）．

我们在二面角的棱上选取射线OP，以及在它的两个界面上引射线OA和OB与OP成同一量值的角β（图 2a）．在β变化时，射线OA和OB将翻转，很清楚，当β取遍由0到$\frac{\pi}{2}$的所有值时，角$AOB=\alpha$将由0变化到φ．如果射线OB对OP翻转角为$\pi-\beta$（图 2b），角α将由π变化到φ（当$0<\beta<\frac{\pi}{2}$时）．

用不复杂的计算来严格说明这个讨论．设通过点P作的垂直于二面角的棱的平面交射线于点A和B，M是线段AB的中点（我们研究第一种情况——图 2a）．则

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{|MA|}{|OA|}=\frac{|PA|\sin(\varphi/2)}{|OA|}=\sin\beta\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

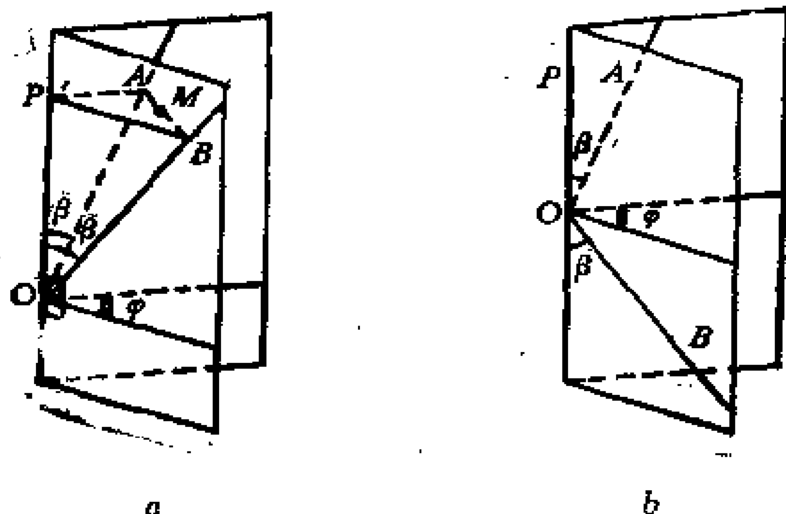


图 2

因此，当 β 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 取 $\left[0, \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$ 区间的所有值，而角 α 本身是在区间 $[0, \varphi]$ 中的角(因为角 $\frac{\alpha}{2}$ 是锐角)。

对第二种情况的计算我们留给读者. 这里我们指出，怎样可以回避这些计算. 显然，两个邻补的二面角(交它们的公共棱的)用任意平面去截形成互为邻补角的两个平面角(图3). 已知二面角的邻补二面角在截面上的角，正如上面指出的，可以取由 0 到 $\pi-\varphi$ 的任意值($\pi-\varphi$ 是这个邻补角的

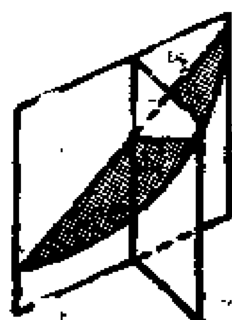


图 3

值）.所以对应原二面角截线将得到由π到φ取值的角，这正是所需要的.

我们转到问题2．设量值为φ的角A_1OB_1是量值为α的角AOB的正交投影．角A_1OB_1用这样的二面角来确定，二面角的棱垂直于通过O点引的平面A_1OB_1，而它的界面包含射线OA_1和OB_1．显然，角AOB是这个二面角的截线，这样一来，我们重新处于问题1的情势．现在只是已知截角α而不是二面角φ的值．但由问题1已知，对任意给定的α和φ，$0<\alpha$，$\varphi<\pi$，可以这样截量值为φ的二面角，使得截线所得的角的值是α．因此，在问题2中，当投影时可以得到为任意φ值的与α无关的角$(0<\varphi<\pi)$，考虑到$\varphi<\pi$(因为角AOB小于展开的角)，我们求得解答，$0<\varphi<\pi$.

三面角　设已知三角形ABC和不在这个三角形的平面上的点S．由顶点为S交三角形ABC的所有射线的并称为（凸）三面角$SABC$(有时，定义非凸三面角$SABC$——由顶点S出发，不与三角形ABC内部相交的所有射线的并——这样的三面角我们不研究).

为简单起见，对于三面角$SABC$我们将利用如下的表示：$\widehat{A}$，$\widehat{B}$，$\widehat{C}$表示分别以SA，SB，SC为棱的二面角的值，α、β、γ是对这些二面角的面角的值.

三面角——是可与三角形空间类比中的一个(另一个类比是四面体).所以三面角的许多几何定理很象三角形中的几何定理(在这种情况下面角对应于三角形的边，而二面角对应于三角形的角).例如，有名的定理《三面角的每个面角小于另外两个面角之和》——类似于三角形不等式．对三面角$SABC_1$(图4)应用这个定理，我们得到三面角中另外一个

很有用的性质："三面角三个面角之和小于360°".

类似于定理"三角形的三条高线相交于一点"的是下面问题中的论断.

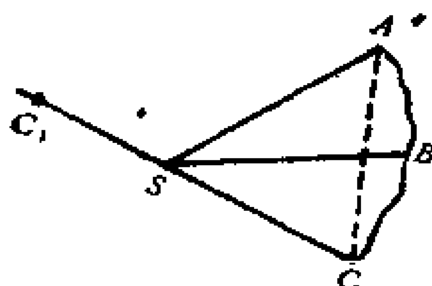


图 4

问题 3 证明：通过三面角的的棱引的垂直于所对界面的三张平面("高线")具有公共直线.(所指出的平面是单值确定的，也就是至少有两个面角，为确定起见，不访设角 ASB 和角 ASC，不是直角)

证明 我们归结为运用平面几何中类似的定理.

通过在棱 SA 上取的点 A 作垂直于这条棱的平面(图5)，设 B 和 C 是这个平面分别与直线 SB 和 SC 的交点，AA_1，BB_1，CC_1 是问题条件中的平面与平面 ABC 的交线.

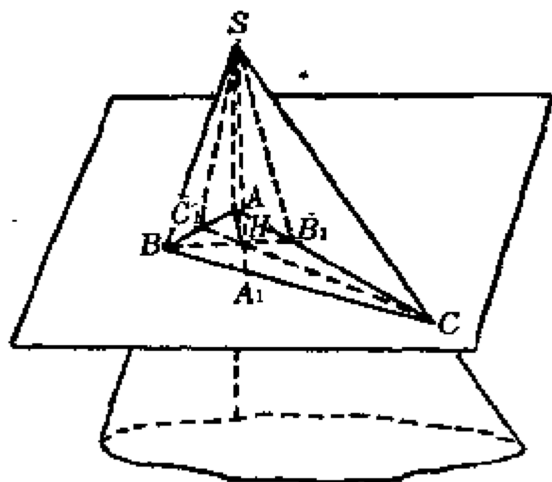


图 5

平面 SAA_1 垂直于平面 SBC(根据条件)和平面 ABC(它通过面 ABC 的垂线 SA)，所以平面 SAA_1 垂直于平面 SBC 与 ABC 的交线是直线 BC. 由此得出，$AA_1 \perp BC$，也就是，AA_1 是三角形 ABC 的高线.

平面 ASC 垂直于平面 ABC 和平面 SBB_1，所以它垂

直于直线BB_1，因此，$BB_1\perp AC$. 类似可证，$CC_1\perp AB$. 这意味着BB_1和CC_1也是三角形ABC的高线.

三角形ABC的高线AA_1，BB_1和CC_1相交于一点H，所以，在问题中谈到的三个平面相交于一条直线——直线SH.

正弦与余弦定理　对于(凸)的三面角下述关系式为真：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C} \tag{1}$$

(正弦定理)；

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A \tag{2}$$

(第一余弦定理)；

$$\cos\widehat{A}=-\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos\alpha \tag{3}$$

(第二余弦定理)

正弦定理的证明：我们在棱SA上取点P，$|SP|=1$，设Q，R和H是它在直线SB、SC和平面SBC上的射影(图6).在直角三角形PQH中，在顶点Q的角等于$\widehat{B}$（如果$\widehat{B}\leqslant\frac{\pi}{2}$，见图6a）或者$\pi-\widehat{B}$（当$\widehat{B}>\frac{\pi}{2}$见图6b）；

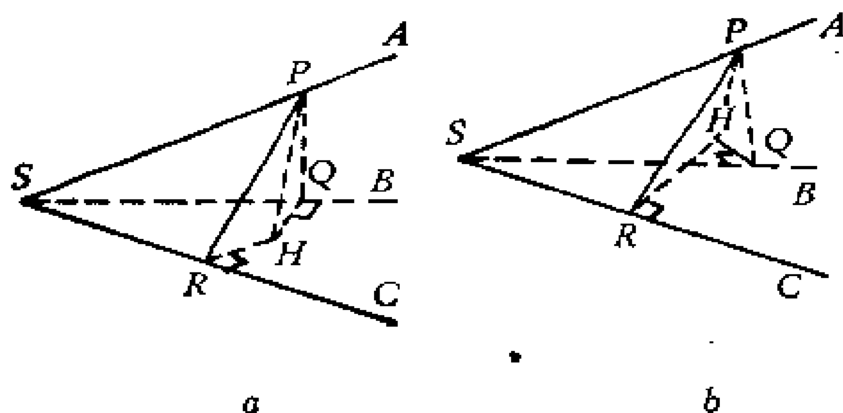


图 6

在任何情况下，

$|PH| = |PQ| \sin\widehat{B} = |SP| \sin\gamma \cdot \sin\widehat{B} = \sin\gamma \cdot \sin\widehat{B}.$

由直角三角形 PRH 和 SPR 类似可得，

$|PH| = \sin\beta \cdot \sin\widehat{C}$. 由这两个表达式相等，我们求得，

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\widehat{C}}$，同样可以证明定理中的另一个等式.

第一余弦定理的证明，设向量 $\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$ 具有长度是 1，P 与 Q 是点 B 和 C 在直线 SA 上的射线.（图 7）.

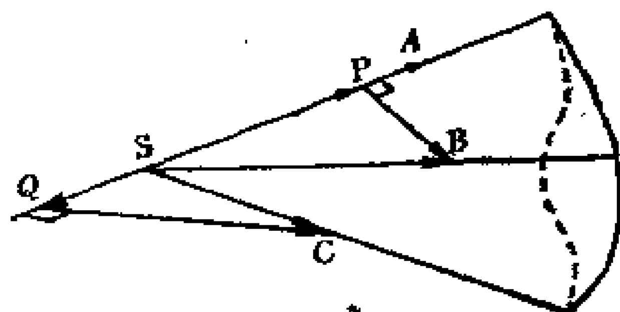


图 7.

则

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \cos\gamma,$$

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos\beta,$$

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos\alpha,$$

向量 $\overrightarrow{PB}$ 和 $\overrightarrow{QC}$ 之间的角等于 $\widehat{A}$，$\overrightarrow{SP} = \cos\alpha\ \overrightarrow{SA}$，

$\overrightarrow{SQ} = \cos\beta\ \overrightarrow{SA}$，且 $|QC| = \sin\beta, |PB| \sin\gamma$.（除这个锐角关系之外，角 β 和 γ 是直角或钝角）. 进一步，

$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SQ}$，$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP}$，并且根据标量积的性质，

$$\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}\cdot\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SQ}\cdot\overrightarrow{SP},$$

由此，

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{A}=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

也就是

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{A}.$$

（定理得证）

如果角A是直角，则$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$．这个结论有时叫做三面角的毕达哥拉斯定理。

为了证明第二余弦定理利用对极（或补）三面角的概念是方便的．

对极的角　设已知三面角$SABC$．通过它的顶点S对面SBC引垂线，并在它上面（有两种可能）取射线SA_1，使得角ASA_1是钝角．换言之，点A和A_1应当在平面SBC的不同侧（自己说明，为什么角ASA_1不能是直角）.类似地选取射线SB_1和SC_1．$SB_1\perp$平面SAC，$SC_1\perp$平面SAB，角BSB_1和角CSC_1都是钝角．三面角$SA_1B_1C_1$叫做三面角$SABC$的对极（补）三面角．

对极三面角的许多应用的依据是下面两条有趣的性质：

（1）对极角的对极三面角与原来的三面角重合．

（2）对于相互对极的三面角$SABC$和$SA_1B_1C_1$．

$$\alpha_1=\pi-\widehat{A},\ \beta_1=\pi-\widehat{B},\ \gamma_1=\pi-\widehat{C}, \tag{4}$$

$$\widehat{A}_1=\pi-\alpha,\ \widehat{B}_1=\pi-\beta,\ \widehat{C}_1=\pi-\gamma, \tag{5}$$

请独立证明这两个性质（见练习5）．

第二余弦定理的证明　对于已知角 $SABC$ 的对极三面角 $SA_1B_1C_1$ 写出第一余弦定理：

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1\cos\gamma_1-\sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\widehat{A}_1,$$

利用关系式（4）和（5），我们得到

$$\cos(\pi-\widehat{A})=\cos(\pi-\widehat{B})\cos(\pi-\widehat{C})+\sin(\pi-\widehat{B})\sin(\pi-\widehat{C})\cos(\pi-\alpha),$$

由此即得到（3）.

练习题

1. 证明：凸二面角的平分面是这个二面角中到它两个界面距离等远的点的集合.

2. 已知二面角和与它的棱相交且通过二面角内部的直线 l.

（a）设它不垂直于二面角的棱. 证明：通过直线 l 可以作平面，使 l 是得到的截角的平分线，这样的平面是唯一的.

（b）如果已知直线垂直于棱，在什么情况下能够作出（a）中的平面?

3. 证明下面三个平面具有公共的直线.

（a）三面角的三个二面角的平分面.（"分角线"）.

（b）通过三面角的棱与所对面角的平分线作的平面（"中线"）.

（c）垂直于三面角的界面并且通过它的"分角线"的平面（"中垂线"）.

4. 对任意三面角用平面都能截得截线是正三角形吗?

5. 证明对极三面角的性质（1）与（2）.

6. 下列和数在怎样的范围内？

（a）三面角的面角；

（b）三面角的二面角.

7.（a）证明 如果三面角的所有二面角都是锐角，则所有面角也都是锐角.

（b）逆命题对吗？

8. 在三面角中两个二面角之和等于π. 证明它们所对的面角之和也等于π.

9. 在三面角中通过它的顶点，在每个界面上引垂直于它的对棱的直线. 证明这三条直线共面.

译自《量子》1984年第12期

十八、多图形的立体几何问题

Л.施捷恩别尔克

在准备数学应试的学生中，最薄弱的方面是立体几何，他们中的许多人甚至只作过极少量的立体几何习题．这说明，立体几何问题是学校习题集中的“皇后”．如果其它的问题可以指出这个问题“在什么范畴内”（“属二次方程”，“属相似形”），那么，立体几何则是所有方法的总和．为了解立体几何问题，无论纯立体几何方法，还是平面几何的、代数的方法等等都是需要采用的．学会以怎样的顺序使用这些方法是很重要的，这正是我们要谈的．

这里，我们介绍解多图形的立体几何问题中的两个关键的因素：

（i）把问题分解为一系列更简单的问题；

（ii）逐次使用代数方法．

我们研究例题．

问题1 在以S为顶点的正四棱锥$SABCD$中有一个内切球．与第一个球相切的第二个球，也切棱锥的底面于点A．通过第二个球的中心和棱锥底面BC边作截面交棱SA于点K．如果已知棱SA垂直于截面的对角线CK．求这个截面对棱锥底面的倾角．

着手解这个问题时，不熟练的学生通常试图画出对问题所有条件都能“很好看到”的图形，并且逐次地将其形的一个元素通过另一个来表示．但是，要做到这一点，即使不是不可能，恐怕也是很困难的．

我们采取另外的行动，去画总体示意图(图 1)，并且试着回答这样的问题："为了精确地描述这个结构，应当知道怎样的尺寸?"为了完全确定棱锥，必须知道有关的参数，例如底面的边长以及侧面的倾角，对于球需要知道半径，对于割平面（截面）需要知道它的倾角．当然，也可以选择另外的参数，譬如说代替底边为棱锥的高等等．利用这些参数为的是足够简单地来描述问题的条件和表达所求的量．常有这种情况，

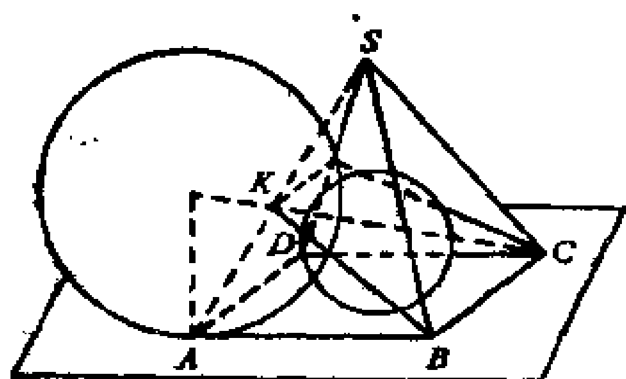


图 1

第一种参数的选择不完全恰当，则按解的过程中的需要改换变量或者引入新的变量．于是，我们设 a 是棱锥底面的边长，α 是棱锥侧面对底面的倾角，r 和 R 分别表示第一个球和第二个球的半径，φ 表示割平面（截面）的倾角．

很清楚，这些量之间存在着确定的关系式，我们试图找到这种关系式．需要注意的是：不是通过一个表示另一个，而是找关系式．最后我们必须计算的只是 φ．

现在我们划分图"把"，也就是彼此之间用问题条件联系着的给定结构的图形组．

（1）棱锥和内切球；

（2）棱锥底面和两个球(我们强调：只是底而不是整个棱锥)；

（3）棱锥的底，第二个球和割平面(截面)；

（4）割平面和棱锥．（这里不能对付一条直线 SA，

因为实质上说，这是棱锥的一条棱）.

对于每个“把”我们作独立的图形．分开它们，为的是方便地求出它们图形中的关系式，当线段长度是已知时，就在线段的旁边（象在公式中一样）写上这些长度，这个因素很重要；在图中的长度可以帮我们看到方程．在图中放置长度的过程我们称为“图形的标识”．现在对每个“把”我们写出得到的关系式．

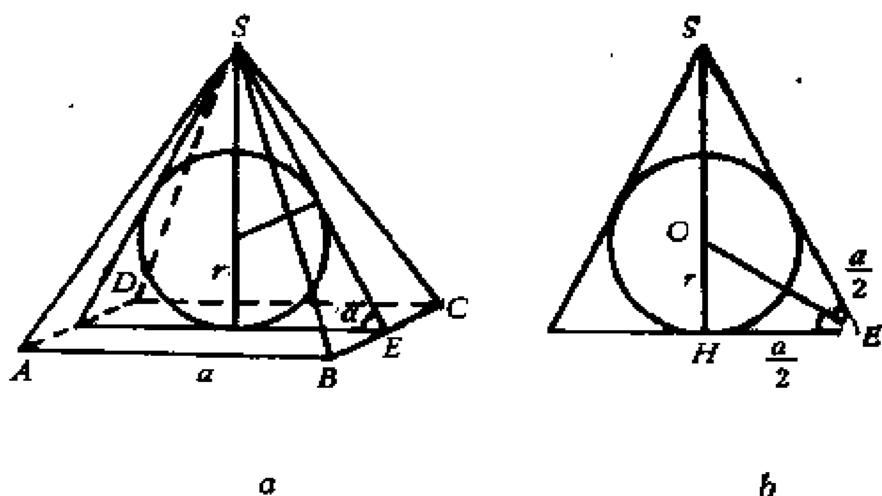


图 2

第1图“把”．通过棱锥的高和面 SBC 上的侧高 SE，做平面交棱锥为一个等腰三角形，交球为内切在这等腰三角形内的一个半径为 r 的圆(图 2a)．(这个论断，在详细写解的过程中应当证明，尽管它们看来是如此的显然．但我们现在重要的是寻求解本身，并且求得解答，所以上述的那种解释与说明我们就略去了．而怎样“进行严格性”的证明，在学校教学和各种升学参考书中都已给予了充分地注意)．我们独立地分出截面(图 2.b)，内切球的中心 O 位于角 SEH 的平分线上，角 SEH 的值等于棱锥侧面与底面之间的倾角．

由此得出第一个关系式：

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

我们指出，不利用截面，而用棱锥在垂直于棱 BC 的平面上的射影，同样也可以得到图 2.b.

第 2 图"把"．取出两个球和棱锥底面的单独图形(图 3a)，选择这样的位置进行配置，使得我们需要的线段和角看到的是自然的量值(图 3.b)．通过明显的辅助作图（不要忘记作完之后必须证明！）并且在图上标出来，我们得到方程

$$(R+r)^2-(R-r)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

(通过两个球的中心以及球与底面的切点作截面也得到同样的图形)．

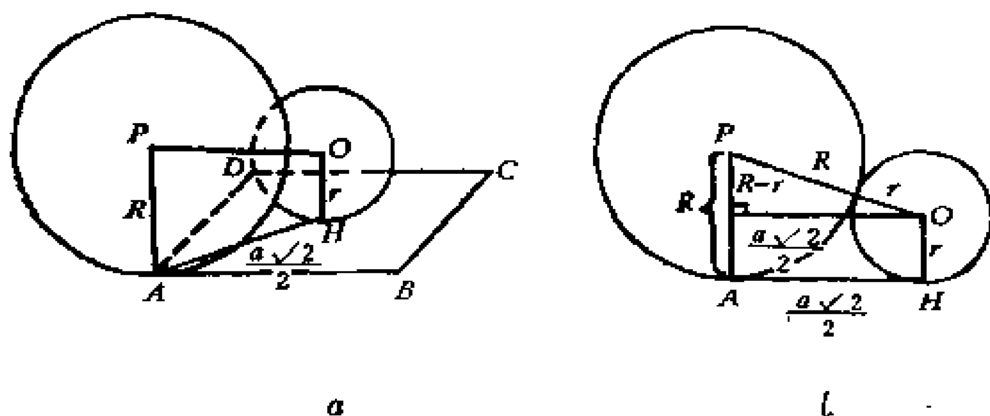
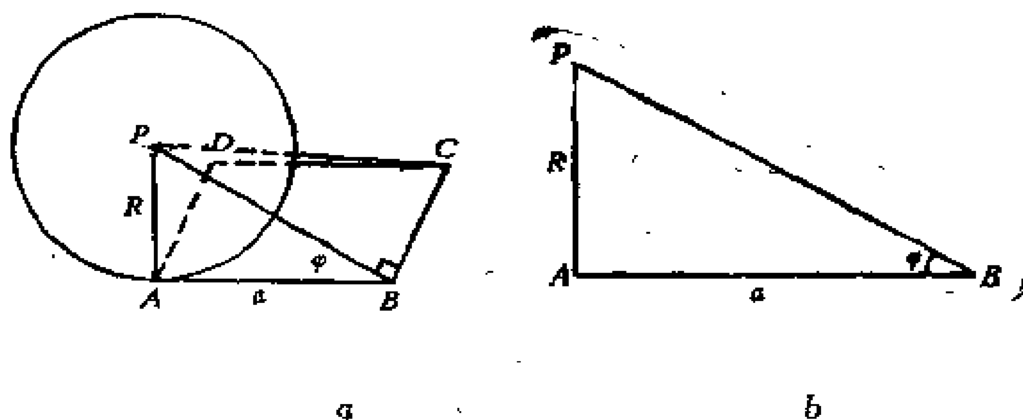


图 3　第 2 图把

第 3 图"把"．类似的引证，放置"把"在单独的图中(图 4a)，通过辅助作图和标图（证明$\angle PBA=\varphi$！）并且画截面(平面 PAB—见图 4.b)由直角三角形 PAB，我们得到方程

$$R = a\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

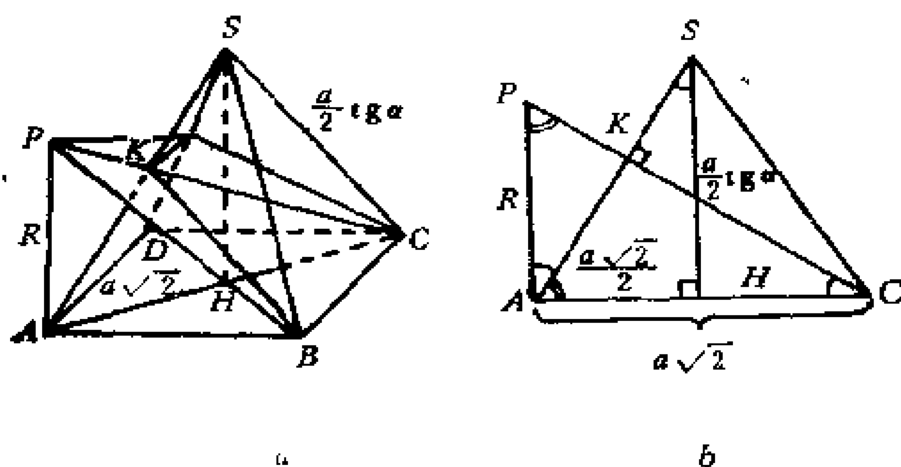


a b

图 4

第 4 图"把" 再按同样的手续，在图 5a 中指明了有标识的图"把"。图 5b 是"适当的"截平面 ACS，在截平面上对全部所需要的角(它们用小圆弧标记)，看到的都是自然量值。根据图形容易观察到，这些角中的某些个是相等的。由此得出三角形 PAC 和 AHS 相似，进而有方程式

$$\frac{R}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}} \quad 或者 \quad R = 2a\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$



a b

图 5

现在我们审查条件(这是很有益的检验方法).

(1) 正棱锥，在确定棱锥中线段的长时利用这个条件.

(2) 第一个球是内切球，当建立第一"把"的方程时，在图3.b中利用($\angle AHO=90°$).

(3) 第二球与第一球相切，利用于确定两个球心之间的距离(图3.b)

(4) 第二球与底面相切，当建立第3"把"的方程时($\angle PAB=\varphi$)，在图3b中利用到($\angle HAP=90°$).

(5) 棱SA与截面对角线CK的垂直性，在建立第4"把"的方程时被利用.

于是，全部条件都用到了，得到带有5个未知数的4个方程. 因为必须找到且只找一个没有量数的量，那么有量数的量应该约简，这就是说，缺少一个方程不应该作为盯住的目标.

到此为止几何方法暂时结束，下面采用代数方法.(对代数，应试中学生通常感到自己有把握). 我们汇集所得到的方程作为一组:

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$(r+R)^2-(R-r)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad 或者 \quad 8Rr=a^2,$$

$$R=a\operatorname{tg}\varphi,$$

$$R=2a\operatorname{ctg}\alpha.$$

有数值的量R，r和a，由这些方程中不难消去，此后剩下带有未知数φ和α的两个方程组.

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1, \\ \operatorname{tg}\varphi=2\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}$$

这个方程组的解留给读者去完成.

$\left(答:\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

我们归纳一下，解带有彼此相连通的许多图形的立体几何问题，可以分为下列步骤：

1. 作图——是总体外形图. 在图中不应有辅助线；它们只是朦胧的总体画面.

2. 引入由图中元素大小确定的变量. 如果这些变量有许多也不要害怕，它们是为了个别地作出共形元素中的每一个所必须的.

3. 利用总体图和问题的条件分出“图把”.

4. 作出每“把”的单独的图形、标识图形.

5. 对于每个“图把”选择出这样的缩图(或者这样的截面)，为的是打算用方程联系的所有线段和角，在这个图“把”中，看到的是自然的量值，标定所得到的图.

6. 列出由每个“图把”所得到的方程，不必耽心它们关于什么量是许可的.

7. 检验所有条件的利用情况，方程和未知数的数量以及找到符合条件需要的这样的数值的可能性.

8. 将引进的各个方程联立为方程组，并且解这个方程组，暂时放弃几何方法，而利用代数和三角的方法.

9. 检验解答. 检验几何解这个术语是值得单独说一说的. 现在我们介绍一种检验解的方法——估量法. 图中量

的大小与我们问题的解答彼此应是一致的.

简单的计算指出，在我们求 φ 值时，角 α 与直角相差不大$\left(\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$，也就是棱锥要颇为有力的伸长，而第二球的半径比第一个（内切）球的半径要小：$R\approx\frac{2r}{3}$. 其实，我们是凭借不正确的、确切的说是凭借不完全正确的图形来求解的. 难怪有人说："几何学——是由不正确的图形作出正确结论的艺术". 容易确认，我们由第1、第3和第4"图把"引入的方程，与棱锥的"伸长度"没有任何关系. 这就是在研究第二"图把"时应当进行修正. 修正过的图3.6的变态在图6中显示了. 但是，在方程最终的形式上，这个修正并没表现出来. 我们着重指出，在写解答的时候应当考虑到图形位置的所有可能的变态.

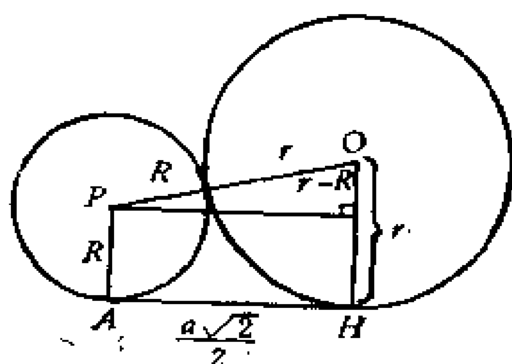


图 6

在引入的解的模式中总体图的作用，基本上归于为了能够分出图把. 正如下面问题中的分群，可以直接根据条件作出.

问题2 点 A_1，B_1，C_1，D_1，A_2，B_2，C_2，D_2 位于一个球面上. 线段 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 和 D_1D_2 相交于 D_1D_2 的二等分点 O. 已知 $D_1D_2=2l$，三角形 OB_2C_1 与 OB_1C_2 面积之比等于 k，锥 $OA_1B_1C_1$ 和锥 $OA_2B_2C_2$ 体积

之比等于m，而锥$OA_2B_1D_1$和$OA_1B_1D_2$体积之比等于n．求线段OA_1，OB_1和OC_1的长.

读者能够独立地确认，对这个问题可以作出总体图. 但根据总体图什么也看不到. 因此不必从它着手，而应立刻着手于分“把”和组成方程. 设$a_1=|OA_1|$，$a_2=|OA_2|$，$b_1=|OB_1|$. 类似地我们确定量b_2，c_1，c_2，d_1和d_2.（引用了读者很少听到的8个未知数，如果需要的话，它还想引进100个!）立刻见到两个方程：

$$d_1=d_2=l \tag{1}$$

（“把”在这里是线段D_1D_2和它的中点O）. 第二“把”是三角形OB_2C_1和OB_1C_2（图7）.它们的面积通过角$\varphi=\angle B_2OC_1=\angle B_1OC_2$及其夹边来表示，我们得到

$$\frac{S_{OB_2C_1}}{S_{OB_1C_2}}=\frac{0.5\times b_2c_1\sin\varphi}{0.5\times b_1c_2\sin\varphi}=\frac{b_2c_1}{b_1c_2},$$

因此，
$$\frac{b_2c_1}{b_1c_2}=k \tag{2}$$

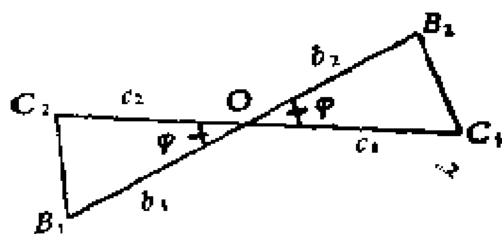


图 7

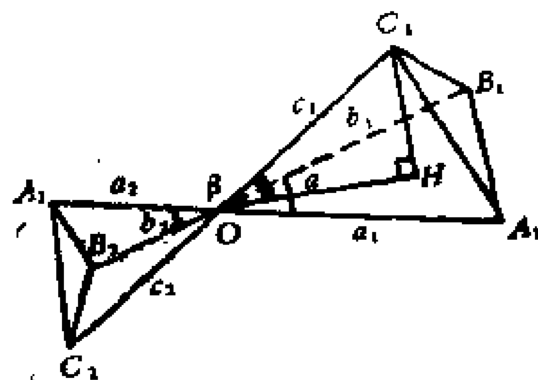


图 8

类似地写出棱锥体积的比（由四面体$OA_1B_1C_1$和$OA_2B_2C_2$组成把）. 我们以求棱锥$OA_1B_1C_1$（图8）的体积为例. 设C_1H是它引向底OA_1B_1上的高，则

$$V_{OA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{OA_1B_1}\cdot|C_1H|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1b_1\sin\alpha\cdot c_1\sin\beta$$

$$=\frac{1}{6}a_1b_1c_1\sin\alpha\sin\beta,$$

其中$\alpha=\angle A_1OB_1$，而β是棱OC_1与底面之间的角．同样可得

$$V_{OA_2B_2C_2}=\frac{1}{6}a_2b_2c_2\sin\alpha\sin\beta.$$

因此，$V_{OA_1B_1C_1}:V_{OA_2B_2C_2}=a_1b_1c_1:a_2b_2c_2$．由此我们得到下面的方程：

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2}=m. \qquad (3)$$

同样可得

$$\frac{a_2b_1d_1}{a_1b_2d_2}=n. \qquad (4)$$

剩下只有一个条件没有利用：除O点外，所有点都在球面上．它们必须写成线段OA_1，OA_2，OB_1，……长度之间的关系式．我们研究由球面和线段A_1A_2及B_1B_2组成的“把”．包含这些线段的平面与球面相交，我们得到图9、三角形OO_1B_1与OA_2B_2相似．（因为$\angle A_1OB_1=\angle A_2OB_2$，

$\angle B_1A_1O=\angle OB_2A_2=\frac{1}{2}\widehat{B_1A_2}$）所以

$|OA_1|:|OB_1|=|OB_2|:|OA_2|$，也就是

$$a_1a_2=b_1b_2. \qquad (5)$$

类似地，

$$b_1b_2=c_1c_2=d_1d_2. \qquad (6)$$

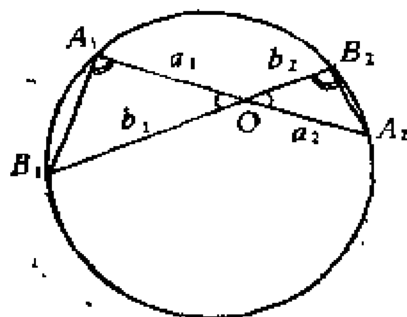


图 9

显然，等式(1)—(6)实际包含有8个方程(有多少未知数有多少个方程)，并且问题中的所有条件都利用了．我们解这些方程组成的方程组，得到答案：

$$a_1=\left(\frac{m}{kn^2}\right)^{\frac{1}{6}}l, \quad b_1=\left(\frac{mn}{k}\right)^{\frac{1}{6}}l, \quad c_1=(k^2mn)^{\frac{1}{6}}l.$$

我们介绍给读者的这个方法，几乎对任何立体几何问题使用时都可以或大或小地取得成功．因此掌握这个方法是必要的，它能帮助考生克服临场胆怯，并已为参加立体几何竞赛的考生所证实．

练 习 题

1． 在三角形 ABC 中，$AC=12\text{cm}$，$AB=BC=3\sqrt{10}$ cm．两个球切三角形 ABC 的平面于点 A 和 C，并于这个平面的不同侧，这两个球心之间的距离等于 15cm．与这两个已给球相切的第三个球通过点 B．确定第三个球的半径．

2． 正三棱锥 $SABCD$ 的侧棱对底平面的倾角为 45°．一个球切底 ABC 所在平面于点 A，并且与棱 BS 在顶点 S 外的延长线相切．通过球心和底面的高线 BD 作平面，求这个平面对底所在平面的倾角．

3. 在半径为11cm的球面上有点A，A_1，B，B_1，C和C_1. 直线AA_1，BB_1和CC_1互相垂直且交于离球心距离为$\sqrt{59}$ cm的一点M，如果已知$BB_1=18$cm，点M分线段CC_1为比$(8+\sqrt{2}):(8-\sqrt{2})$，求线段$AA_1$的长.

4. B、C两点在二面角AD的两个界面上. 线段DE在二面角界面上，并且平行于面积为S的三角形ABC所在的平面. 在四面体$BCDE$中有内切球，k是由球心到直线DE的距离与由DE到平面ABC距离之比. 设B'是点B在平面CDE上的射影. 已知，$\mathrm{tg}\angle B'DE:\mathrm{tg}\angle BDE=l$. 通过$AD$中点作平面$P$平行于平面$ABC$. 如果已知四面体$BCDE$所有界面的面积之和等于$\sigma$. 求用平面$P$截由四面体$ABCD$与$BCDE$合成的多面体$ABCDE$的截面的面积.

译自《量子》1983年第2期

十九、立体几何的非标准问题

C.奥夫齐尼柯夫　И.沙雷金

在每个考生准备参加升学考试而研究莫斯科大学近年来的数学试题的时候，就会把注意力转移到变化十分显著的下边两部分：其中占四分之三的部分是相当容易的习题，另外四分之一的部分是难度很大的习题．在《难题》中包括非标准代数（或三角）题，或立体几何问题．

为了在笔试中能出色地交卷，应当对非标准性问题的解法给以更多的注意．

首先要强调构造恰当的图的重要性．在构图时不要忘记，射影妨害了许多空间图形元素间的关系，必须随时琢磨真正的角度及长度．图不应当充满难于描述的细节，例如通常没有必要在图中去描绘球面或等分的平面．另一方面，成功地补充构图，不仅可以表现空间形状的结构，而且也可给出解题的巧妙的想法．所给的立体几何图形中，一些重要的平面元素是非常重要的，例如在个别的图中描述的侧面、截面或投影等等．

问题 1　三棱锥 $SABC$ 由它的顶点 B 或 C 构成的三个面角之和为 $180°$，又 $|SA|=|BC|$．如果棱锥的侧面 SBC 的面积等于 $100\ cm^2$，外接球的球心距底面为 3cm．试求棱锥的体积．

解　问题的第一个条件是最不便于利用的．为了要使它更加直观，考虑棱锥 $SABC$（图 1）的展开图．由第一个条件得知，点 S_1，B，S_3 与 S_1，C，S_2 同样位于一条直

线上. 因为 BC 是$\triangle S_1S_2S_3$两腰中点的连线, $|S_2S_3|=2|BC|$. 另一方面,按问题条件, $|AS_3|=|AS_2|=|BC|$.

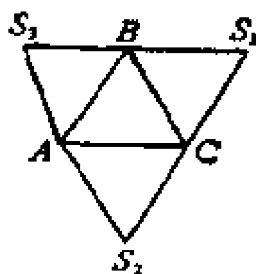


图 1

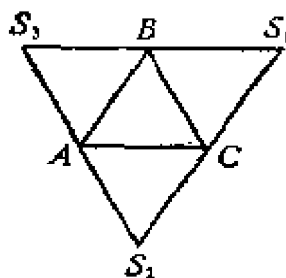


图 2

因此, $\triangle AS_2S_3$是退化的, 它的正确的展开图如图 2 所示. 由此立即得知, 所有的面都是全等的三角形. 就是说(试予证明!), 它的外切球的球心距所有的面相等. 如果将外切球的球心与所有的顶点连接, 则这个棱锥分为四个同样大小的棱锥, 每个棱锥的体积等于

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 100\text{cm}^3=100\text{cm}^3.$$

问题 2 具有顶点 S 及底面 ABC 的正三棱锥 $SABC$ 有一半径为 1 的内切球, 棱锥的底面与侧面间的二面角等于 60°. 证明: 存在唯一的平面, 与底面的边 AB 与 BC 相截于点 M 与 N, 使 $|MN|=5$, 它与球相切于距点 M 与 N 等距的点, 并与(其中 K 为垂足)棱锥的高 SK 的延长线相交于点 D, 试求线段 SD 的长.

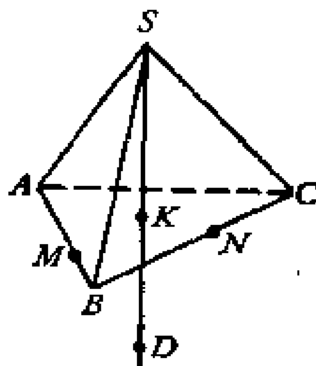


图 3

解 见图 3，我们马上注意到，棱锥完全由原有的给定平面所确定．例如，我们计算底面的边长，考虑过棱锥的高 SK 与侧棱 SB 的截面(这样的截面经常被用于解决正棱锥的问题)．这个截面交侧面 ASC 于侧高 SL(图 4a)；在它上面点 O 是内切球的球心．因为 $|LK|=\sqrt{3}$，底面的边等于 6 (图 4.b)，同样地可以算出 $|SK|=3$．

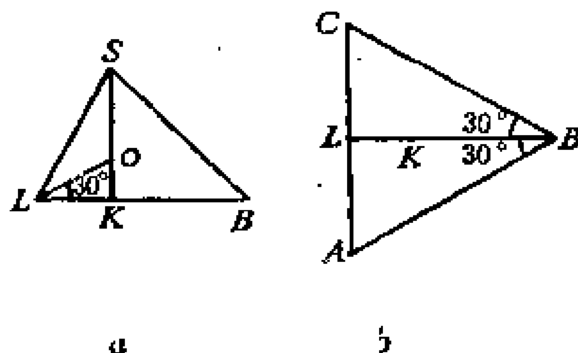


图 4

我们现在证明，点 M 与 N 由问题中的条件单值地确定．因为底面也和球相切，由问题条件得知，$|MK|=|KN|$ (试予证明！)．命 $|AM|=x$．此时可断定或 $|CN|=x$ 或 $|BN|=x$(试予证明！)．

考虑第一种情况(图 5.a)．因为直线 MN 平行于底边 AC，

$$\frac{|MB|}{|AB|}=\frac{|MN|}{|AC|}=\frac{5}{6},$$

由此 $x=1$．我们注意，其中 $|PK|=|KL|-|PL|=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$．就是说，过直线 MN 与球相切的平面，与 $|SK|$ 的延线交于点 K．

转到第二种情形(图 5.b)，对于$\triangle MBN$，按余弦定律计算x，得到$x=\frac{9-4\sqrt{3}}{3}$.（试独立地进行计算并说明理由，为什么对x进行必要的限制）.现在确定点K至线段MN的距离．为此要计算$\triangle MKN$的面积：

$$S_{MKN}=S_{MBK}+S_{KBN}-S_{MBN}$$

$$=\frac{1}{2}(6-x)2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{3}$$

$$-\frac{1}{2}(6-x)x\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{12}.$$

因此，$$KP=\left(2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{12}\right):5=\frac{5\sqrt{3}}{6}>1,$$

即过线段MN并与球相切的平面，与高线SK相交于点K，这就与问题的条件相矛盾．因此，第二种情形是不可能的，这就证明了所求平面的存在性与唯一性.

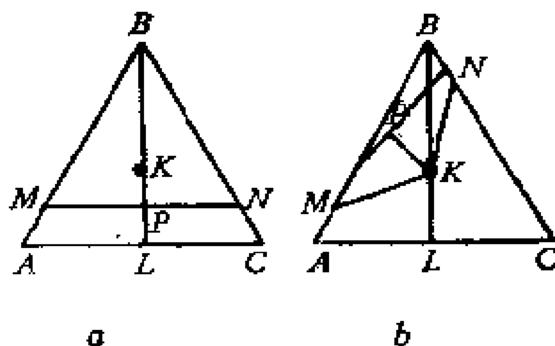
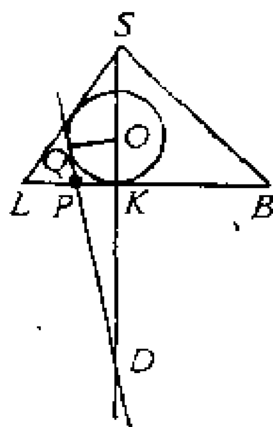


图 5

现在转到进行线段长度SD的计算上来．在图 6 中重新描绘出那个与图 4.a 相同的截面．由于$\triangle PKD\backsim\triangle QOD$，容易得到$|KD|=6$．由此$|SD|=|KD|+|SK|=9$.



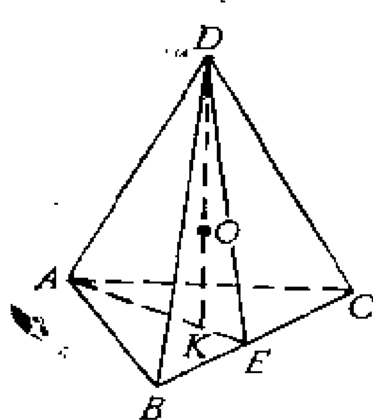


图 6　　　　图 7

问题 3　已知三棱锥 $ABCD$，它的异面的棱 AC 和 BD，AD 与 BC 互相垂直，棱 AB 与 CD 相等，所有棱锥的棱与半径为 r 的球相切，试求底面 ABC 的面积.

解　作过棱 AD 且垂直于棱 BC 的平面(图 7)．显然(为什么?)，这个平面包含棱锥的高，而且 $DE\perp BC$.

$$|BE|^2=|AB|^2-|AE|^2=|BD|^2-|DE|^2;$$

$$|EC|^2=|AC|^2-|AE|^2=|CD|^2-|DE|^2.$$

由此

$$|AB|^2+|CD|^2=|BD|^2+|AC|^2 \qquad (1)$$

类似地

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2 \qquad (2)$$

现在利用空间的四边形，它的每边都与球相切，则对边边长的和相等．(类似于熟知的圆外切的四边形的性质，试独立证明)．把这个论断用于具有边长 AB，BC，CD 与 DA 的空间四边形 $ABCD$ 上来，得

$$|AB|+|CD|=|BC|+|AD| \qquad (3)$$

另一方面，可以把 $ABCD$ 当作具有边长 AB、BD、DC 及

CA 的空间四边形。因此

$$|AB|+|CD|=|BD|+|AC| \tag{4}$$

比较等式(1)—(4)，并命 $|AB|=a$，得到两组方程

$$\begin{cases}|BD|^2+|AC|^2=2a^2,\\|BD|+|AC|=2a.\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}|BC|^2+|AD|^2=2a^2,\\|BC|+|AD|=2a.\end{cases}$$

由这两组等式容易导出，棱锥的所有棱长都等于 a．显然，与所有的棱相切的球心，与正四面体的中心相合．但 $r^2=r_1^2+r_2^2$，此处 r_1 为内切球的半径，而 r_2 是与底面内切圆半径．因为 $r_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a$ 与 $r_2=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，$r^2=\frac{1}{8}a^2$，由此，棱锥的底面△ABC 的面积

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}r^2.$$

问题 4 三面角 $SASC$（S 是顶点）的所有面角都是直角，在界面 ASC 上取距顶点 S 为 5cm 并与棱 SC 距离为 3cm 的点 S．由位于三面角 $SABC$ 内部的某一点 M 至点 D 发出光线，光线与棱 SB 组成 $\frac{\pi}{4}$ 的角并与棱 SC 组成角为 $\frac{\pi}{3}$、光线由角 $SABC$ 的界面反射开始在点 D，然后到点 E 和点 F，试求线段 EF 的长．

解 解的几何思想建立在映射规律的基础上，把光线的轨迹"化直"．我们注意，如果光线自平面呈镜面反射，则关于

这个平面对称的光线，它是投影光线的延伸．在图 8 中描绘了"化直的"光线轨迹．例如，线段 $E'F'$ 是由线段 EF 在构成三面角的平面上反复映射得到的．由问题的条件得知，点 D 处于距侧棱 SA 为 4cm 的地方．因为线段 $F'D$ 在棱 SC 的投影长为 4cm，而它们之间的角为 $\frac{\pi}{3}$，$|F'D|=8$cm．这就是说，线段 $F'D$ 在棱 SB 的投影长度为 $4\sqrt{2}$ cm．因为线段在三个互相垂直的轴上，投影长度的平方和等于线段长度的平方，线段 $F'D$ 在棱 SA 上的投影长为 4cm．由此得知，光线最初落到 BSC 平面上，然后落到 ASB 平面上．点 S 把这个投影分为比 1:3．显然，点 E' 以同样比例分割线段 $F'D$．因此，$|E'F'|=2$cm．

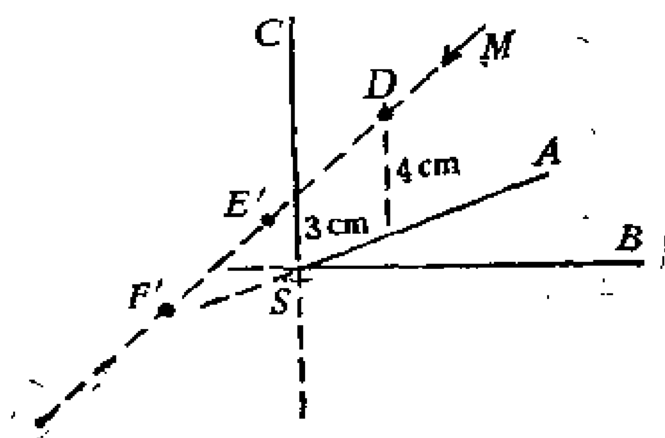


图 8

问题 5　已知棱锥 $SABC$，一直线与 AC 与 BC 两棱垂直相交而且通过棱 BS 的中点．ASB 与 BSC 两个平面的面积相等，而界面 ASC 的面积比平面 BSC 的面积大两倍．自棱锥内的一点 M 到 B、S 两顶点的距离之和等于点 M 到棱锥所有的界面的距离之和．试求由点 M 到顶点 B 的距离，如

果$|AC|=\sqrt{6}$，$|BS|=1$.

解 命K与N表示对于棱AC与SB的公垂线与这两个棱的交点(图9).

很明显，问题的解应当自分析它的条件开始，它不涉及到点M的位置. 由ASB与BSC两个界面面积相等得出，点A与C到棱SB的距离相等.

考虑计算在直线（Ⅰ）上的点到直线（Ⅱ）的距离的一般问题(图10). 命过O_1，O_2两点表示的直线(Ⅰ)，(Ⅱ)的公垂线的两个垂足，$a=|AO_1|$，$d=|O_1O_2|$，φ是(Ⅰ)，(Ⅱ)两直线的交角，h是点A到直线（Ⅱ）的距离. 由图10容易求出

$$h=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+d^2} \qquad (5)$$

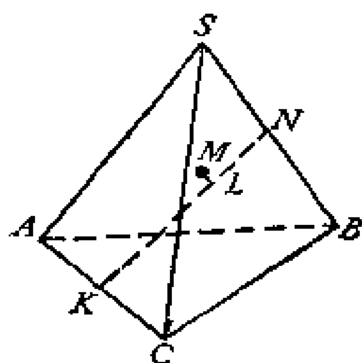


图 9

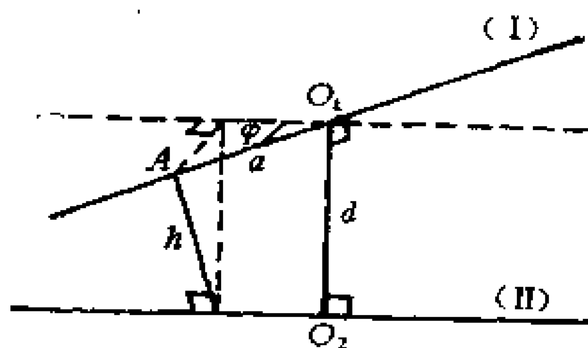


图 10

由此得知，直线（Ⅰ）上距直线（Ⅱ）等距的任意两点，它们到这两条直线的公垂线垂足的距离相等，因此点K是线段AC的中点. 其次由公式（5）表明，点S与点B距棱AC等远，由此得知，界面ASC与ABC面积相同. 由我们导出的公式(5)，同样能得到ASC，BSC两个平面的

面积：

$$S_{ABC}=p=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi+d^2},$$

$$S_{BSC}=q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi+d^2}. \qquad (6)$$

由问题条件 $p=2q$，或

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi+d^2}=\sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi+d^2}. \qquad (7)$$

由此

$$d=\frac{3}{2}|\sin\varphi|. \qquad (8)$$

于是，给定 AC 与 SB 两棱间的角 φ 的平面完全确定了棱锥，除了关于点M说到的之外，满足所有问题的条件.

我们注意，由以上分析同样可得到，线段 KN 在具有 AC，SB 两棱的棱锥的二面角平分面上.

现在转到关于点M的位置分析上来. 由以上分析表明线段 KN 的特殊作用，将我们的命题推进一步，即满足问题条件的点M，在这个线段上，对此我们深信不疑. 考虑点M在线段 KN 上的投影L，L与M两点在垂直于线段KN的平面上，因此在具有 AC，SB 两个棱的棱锥的二面角的平分面上. 如果平面与二面角的平分面垂直，则在这个角内部的点到界面的距离的和是个常量.（试独立地证明，利用自等腰三角形底边上的点到它的两腰的距离之和是一常量）. 因此，点M与点L到棱锥四个面的距离相等，将它们的和用 l 表示并加以计算，命 $x=|KL|$及 V 为棱锥的体积. 显然，由点N到 ABC，ASC 两平面的距离之和等于

$\frac{3V}{p}$. 这就是说，由点L到那些平面的距离之和等于

$\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}$. 类似地计算由点$L$到$BSC$与$ASB$两平面的

距离之和：它们等于$\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}$.

因此，$l=\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}+\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}$

利用公式

$$V=\frac{1}{6}\times|AC|\cdot|BS|\cdot|KN|\cdot|\sin\varphi|$$

（试独立导出这个有用的公式）及公式（6）与（8），我们得到$l=2\sqrt{\frac{2}{5}}\left(d-\frac{x}{2}\right)$.

另一方面，$|SM|+|BM|\geqslant|SL|+|BL|$（试予证明！）因此$l\geqslant|SL|+|BL|$.

但是 $|SL|+|BL|=2\sqrt{\frac{1}{4}+(d-x)^2}$,

由此 $2\sqrt{\frac{2}{5}}\left(d-\frac{x}{2}\right)\geqslant2\sqrt{\frac{1}{4}+(d-x)^2}$

或

$$0.9x^2-1.6dx+0.6d^2+0.25\leqslant0. \qquad (9)$$

由式(8)，$d\leqslant\frac{3}{2}$，故在式（9）中的二次三项式的判别

式D不超过零，因此$D=0$，$d=\frac{3}{2}$，$x=\frac{4}{3}$，点M与点L重合.

$$|MB|=\sqrt{\frac{1}{4}+(d-x)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

最后我们注意，不能把我们导出的问题的解当作笔试的答案的样板. 我们所力求表达的只是基本的想法和解的方法，不少地方都把非常主要的内容留给读者去独立完成了.

练 习 题

1. 已知三棱锥$SABC$，在它的顶点A、B、C的每一个点处三个面角之和等于180°. 如果已知$BC=4$cm，$AC=5$cm，$AB=6$cm. 试求SA与BC两异面棱的距离.

2. 三棱锥$ABCD$的所有侧棱和某个球相切. 连结异面棱AB与CD，AC与BD，AD与BC中点的三个线段相等. $\angle DBC$等于50°，而$\angle BCD$大于$\angle BDC$. 试求ABD与ABC两个界面面积之比.

3. 在直圆锥内部，有三个半径为4，4，5的球与底面相切. 其中的每一个球与另两个球及圆锥的某个母线相切. 如果已知母线与底面之间的角等于$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$，试求圆锥底面的半径.

4. 棱锥$SABC$的三个界面ASB，BSC与ASB面积相等. 由棱BC的中点到ASB与ASC两个面的距离之和是由顶点S所引棱锥的高的$1\frac{1}{2}$倍. 在棱锥的内部有点

M，它到A，B，C三个顶点的距离和的一半等于点M到棱锥所有界面的距离之和．如果棱AS的长等于$\sqrt{\frac{31}{11}}$，试求棱锥的全表面积．

5．棱锥$ABCEH$的底面是凸四边形$ABCE$，它的对角线BE将它分为两个等积的三角形，棱AB的长等于1，BC与CE两棱的长度相等，AH与EH两棱长度的和等于$\sqrt{2}$，棱锥的体积等于$\frac{1}{6}$．试求放在棱锥$ABCEH$内具有最大体积的球的半径．

译自《量子》1979年第6期．